UNIVERSITATEA TEHNICĂ "GH. ASACHI" IAŞI
FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ŞI CALCULATOARE

Dr. ing. Alexandru ONEA

SISTEME CU INFORMAŢII DISCRETE

IAŞI
-1997-

UNIVERSITATEA TEHNICĂ "GH. ASACHI" IAŞI
FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ŞI CALCULATOARE

AGI INF

Dr. ing. Alexandru ONEA

SISTEME CU INFORMAȚII DISCRETE

IAŞI
-1997-

Prefață

Cursul de față este predat la disciplina cu același nume, prevăzută în planul de învățământ al specializării Echipamente de automatizare din cadrul Colegiului Universitar Tehnic Nr. 1.

Aplicațiile de control discret ale proceselor au apărut la începutul anilor '60. Apariția microprocesoarelor la începutul anilor '70 și scăderea continuă a prețului acestora a impulsionat dezvoltarea sistemelor de reglare discrete. În perioada anilor 1970-1980 creșterea anuală a numărului de calculatoare de proces a fost de aproximativ 20-30%. Această tendință de creștere se manifestă și în prezent și a determinat înlocuirea regulatoarelor analogice aproape în totalitate în țările dezvoltate tehnologic.

Datorită acestei dezvoltări rapide, metodele de analiză, proiectare și implementare a sistemelor cu informații discrete au evoluat. La început s-a pus numai problema de a transla metodele proiectare specifice sistemelor continue pentru sistemele discrete. În curând, proiectanții și-au dat seama că o nouă teorie, aceea specifică sistemelor discrete, exploatează mult mai bine potențialul noilor tehnologii.

Scopul acestui curs este de a prezenta teoria sistemelor discrete, cu accent pe conceptele și ideile de bază, precum și unele aspecte practice privind implementarea sistemelor cu informații discrete. Fiecare capitol conține exemple de calcul pentru a fixa cunoștințele.

Cartea se adresează în special studenților de la specializarea Automatică a Universității Tehnice din Iași, dar considerăm că este utilă și studenților altor secții precum și tuturor inginerilor care proiectează sau exploatează sisteme automate cu informații discrete. Pentru parcurgerea cursului sunt necesare cunoștințele de bază de teoria sistemelor, ecuații diferențiale și calcul operațional.

Pe această cale, autorul dorește să mulțumească tuturor celor care au contribuit la realizarea acestei lucrări și, în mod deosebit, domnului profesor Eugen Balaban pentru sugestiile și comentariile care au contribuit la aducerea acestui curs în forma actuală.

Autorul

Iași, noiembrie 1997

I. Introducere

Sistemele cu informaţii discrete includ în componenţa lor subansambluri de prelucrare numerică a datelor, respectiv calculatoare numerice (CN).

Până în anii '60 erau utilizate calculatoarele analogice pentru simularea sistemelor de control automat. Tehnologia analogică utilizată în mecanică pneumatică şi electronică a fost utilizată şi în controlul automat. Dezvoltarea rapidă a microelectronicii şi calculatoarelor a condus la dezvoltarea actuală a automaticii. Iniţial calculatoarele au fost utilizate ca subansambluri în sisteme de control complicate. În prezent, datorită costului scăzut al microprocesoarelor calculatoarele numerice sunt utilizate în regulatoare pentru bucle individuale de reglare. În numeroase domenii, calculatoarele asigură performanţe superioare faţă de regulatoarele analogice şi sunt mai ieftine. Calculatoarele numerice se află încă într-o fază de dezvoltare rapidă datorită progresului circuitelor VSLI (Very Large Scale Integration).

Din cauza acestor mutaţii, analiza, proiectarea şi implementarea sistemelor de control automat s-a modificat drastic. La început, a fost numai problema de a transla metodele de proiectare din continuu pentru sistemele discrete. În curând s-a observat că se obţine un câştig mult mai mare exploatând întregul potenţial al acestor noi metodologii.

În urmă cu 25 de ani era nerealist a se încerca implementarea unui tip de regulator rezultat din această nouă teorie, cu excepţia unor aplicaţii în domeniul aerospaţial sau al sistemelor de control avansate.

În prezent este posibilă analiza şi proiectarea sistemelor discrete la un preţ rezonabil, folosind pachete de programe de proiectare asistate de calculator ce sunt din ce în ce mai răspândite.

Un sistem cu informaţii discrete (sau un sistem discret) poate fi reprezentat schematic ca în figura 1.1. Conducerea proceselor bazată pe algoritmuri de reglare implementate pe echipamente de calcul numerice (calculatoare) este referită curent drept conducere numerică sau reglare numerică. Schema din fig 1.1. se referă la sistemele monovariabile, cu precizarea semnalelor procesate de fiecare bloc în parte şi a naturii acestor semnale.

Mărimea de ieşire din proces y(t) este semnal continuu. Ieşirea este convertită într-un semnal digital cu ajutorul unui convertor analog-numeric (CAN). Convertorul digital analogic (CNA) este de obicei inclus în calculator

Conversia se face la momentele de eşantionare t_k. Computerul interpretează semnalul convertit discret $\{y(t_k)\}$ ca o secvenţă de numere, procesează mărimile măsurate după un algoritm de reglare şi furnizează o nouă secvenţă de numere $\{u(t_k)\}$. Această secvenţă este convertită în semnal analogic cu ajutorul convertorului numeric analogic.

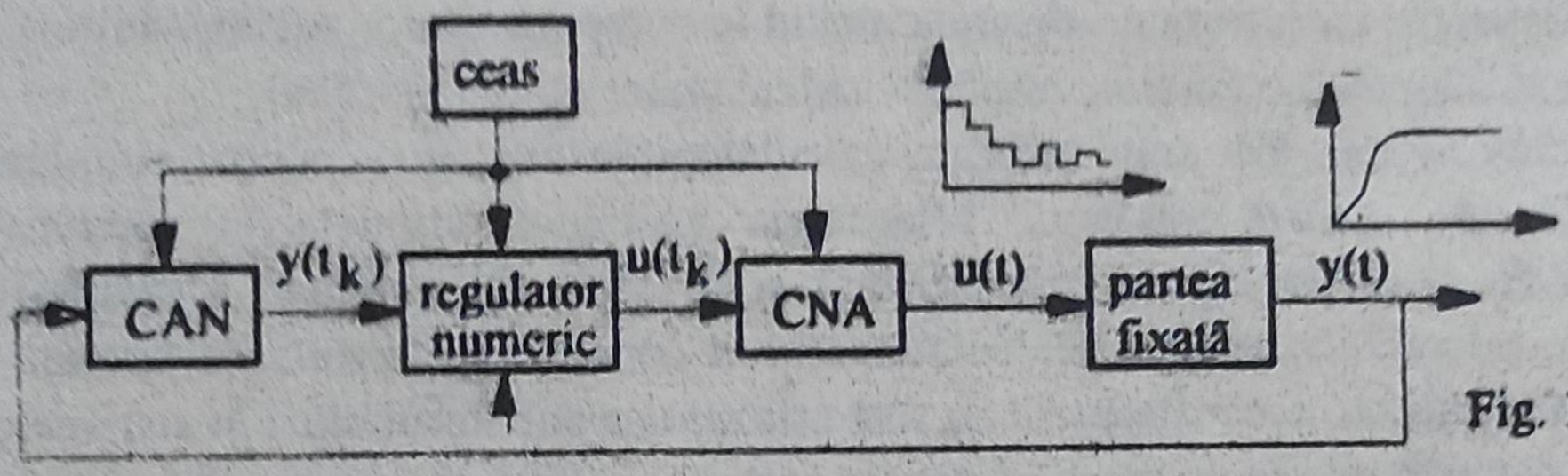


Fig. 1

Fig. 1.1.

De remarcat faptul că partea fixată funcţionează în buclă deschisă în intervalul dintre conversia A-N şi conversia N-A. Sincronizarea se realizează cu ajutorul unui ceas de timp real. Calculatorul funcţionează secvenţial în timp şi fiecare operaţie durează un anumit timp. Totuşi, convertorul N-A trebuie să producă un semnal continuu u(t). Acesta se obţine de obicei menţinând mărimea de comandă constantă între două conversii succesive.

1.1. Tipuri de semnale

Un *semnal continuu în timp*, sau, pe scurt, *semnal continuu* este definit pe un domeniu continuu de timp. Un astfel de semnal poate lua fie valori continue, fie un număr de valori distincte. Un semnal continuu care ia valori continue se numeşte *semnal continuu analogic*. Un semnal continuu care poate lua numai un număr finit de valori distincte se numeşte *semnal continuu cuantificat*.

Procedeul prin care dintr-un semnal analogic se obţine un semnal cuantificat se numeşte *cuantificare*, iar valorile în număr finit, rezultate în urma cuantificării, se numesc valori cuantificate. Figura 1.2 pune în evidenţă diferenţele dintre semnalul analogic continuu (a) şi semnalul analogic cuantificat (b). Uzual, ca limbaj, referirea unui semnal drept semnal continuu, presupune faptul că semnalul respectiv este analogic, prin sintagma "semnal continuu", neînsoţită de nici o altă precizare, înţelegându-se un semnal continuu analogic. Din punct de vedere matematic, semnalele continue (analogice sau cuantificate) sunt funcţii de

variabilă reală cu valori fie într-o submulțime din **R** (semnal analogic), fie într-o mulțime cu număr finit de elemente (semnal cuantificat).

Un *semnal discret în timp*, sau, un semnal discret este un semnal definit pe un domeniu discret de timp. Un astfel de semnal poate lua fie valori continue, fie un număr finit de valori distincte. Un semnal discret care ia valori continue se numește *semnal eșantionat*. Procedeul prin care dintr-un semnal analogic se obține un semnal eșantionat se numește *eșantionare*. Figura 1.2 pune în evidență diferențele dintre semnalul analogic (a) și semnalul eșantionat (c).

Un semnal discret care ia valori cuantificate se numește *semnal numeric* (d). În practica inginerească semnalele numerice se obțin uzual din semnale analogice prin eșantionare și cuantificare.

Trebuie remarcat faptul că, deși semnalele numerice constituie o submulțime a semnalelor discrete, în unele lucrări, prin "semnale discrete" se referă semnalele numerice. Această situație se explică prin faptul că în realizările practice eșantionarea este în general însoțită și de cuantificare, deci semnalele discrete rezultate sunt semnale numerice. Din punct de vedere matematic, semnalele discrete (eșantionate sau numerice) sunt funcții de variabilă întreagă cu valori fie într-o submulțime din **R** (semnal eșantionat), fie într-o mulțime cu număr finit de elemenete (semnal numeric).

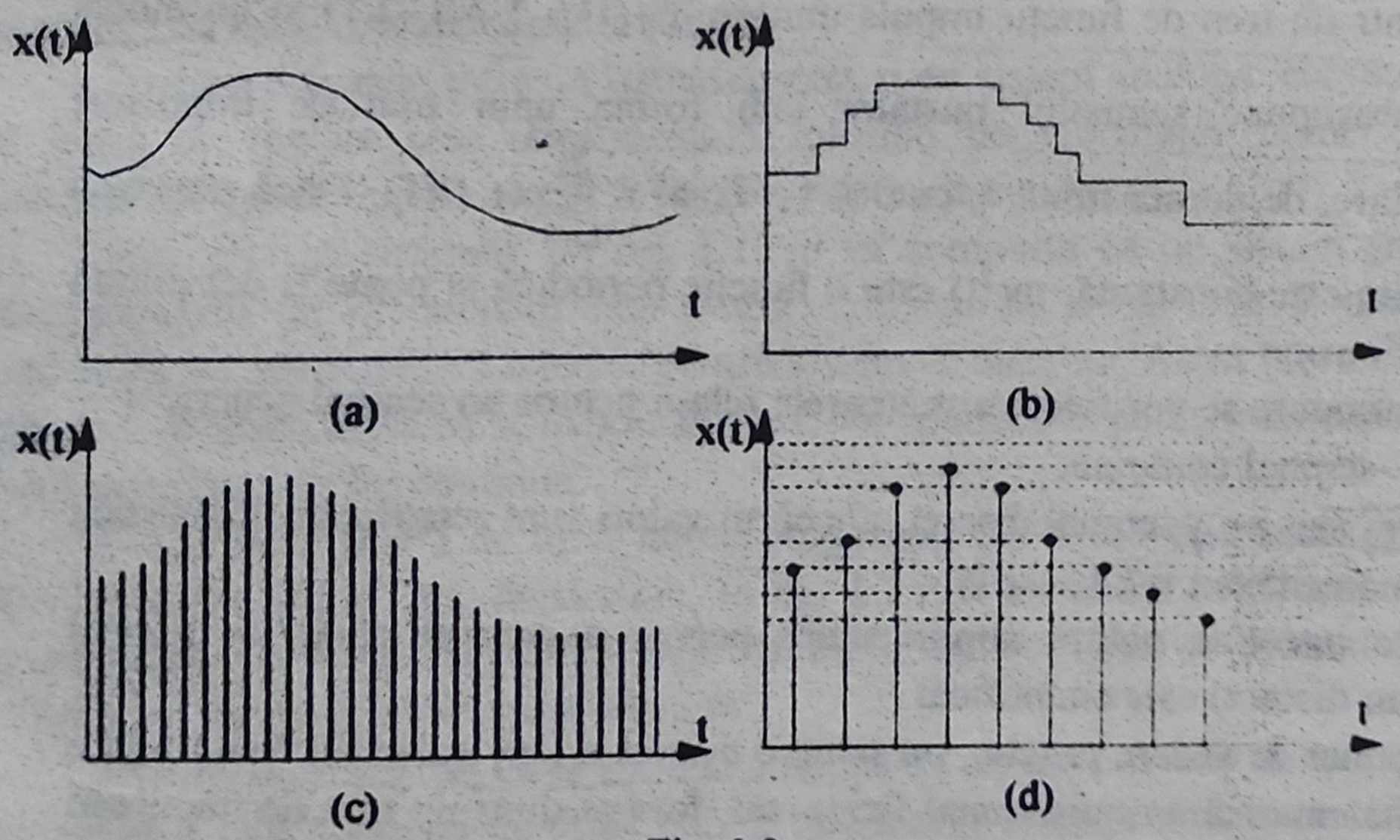


Fig. 1.2.

Ca o mențiune globală precizăm că tipul unui semnal este dat atât de cardinalitatea mulțimii de definiție cât și a mulțimii valorilor funcției asociate

semnalului în cauză. Cardinalitatea mulțimii de definiție precizează dacă semnalul este continuu sau discret, iar cardinalitatatea mulțimii în care ia valori precizează dacă acesta este cuantificat sau necuantificat.

Discretizarea în timp sau eşantionarea constă în preluarea din semnalul continuu în timp numai a unor eşantioane corespunzătoare unor momente discrete de timp. Aceste momente de eşantionare pot fi echidistante, când se poate vorbi de o perioadă constantă de eşantionare T, pot fi aleatoare sau pot fi determinate după o anumită lege. Semnalul discretizat se constituie deci dintr-o succesiune de eşantioane ale semnalului continuu x(t) şi se simbolizează prin x*(t). Elementul fizic care realizează operația de eşantionare se numeşte eşantionor sau comutator de eşantionare şi poate fi asimilat printr-un întrerupător care se închide numai pentru momentele de eşantionare. Dacă funcționarea eşantionarului este periodică în raport cu timpul, adică se închide pentru intervale scurte de timp în mod periodic şi discret: t= 0, T, 2T...KT... se spune că eşantionarea este uniformă. Acesta este cazul cel mai frecvent.

Procesul de eşantionare poate fi reprezentat printr-un proces de modulare în amplitudine de către semnalul continuu a unui tren de impulsuri, care devine semnal purtător. Pentru descrierea matematică a operației de eşantionare, se folosesc două modele: un model ideal, care consideră că semnalul purtător este constituit dintr-un tren de funcții impuls unitare, $\delta_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$ şi un model real care presupune semnalul purtător sub forma unui tren de impulsuri dreptunghiulare, de durată finită τ, cu $0 \le \tau < T$, $p_T = \sum_{k=0}^{\infty} p(t - kT)$. Dacă perioada de eşantionare este constantă, $p_T(t)$ este o funcție periodică şi poate fi dezvoltată într-o serie Fourier:

În continuare se vor folosi următoarele relații pentru un semnal generic x:

- $x_{(t)}$ -semnal continuu;
- $x_{(kT)}$ sau $x_{(k)}$-semnal discret, ale cărui valori sunt repartizate echidistant în timp, la momentele $t = kT$, $k \in N$.

Nu se introduc notații suplimentare pentru a preciza când un semnal (continuu sau discret) este cuantificat.

Din punct de vedere practic, un semnal discret $x_{(kT)}$ poate fi privit drept o abstracție matematică a unui semnal fizic, real, format dintr-un tren de impulsuri dreptunghiulare, de amplitudine $x_{(kT)}$ şi de durată Δ neglijabilă în raport cu T. Altfel spus semnalele discrete, în sensul strict în care au fost introduse anterior, pot face doar obiectul unor prelucrări matematice.

Sistemele automate care procesează semnale cuantificate se numesc *sisteme automate continue*, iar cele care procesează sisteme discrete se numesc *sisteme automate discrete*. Ca tehnologie, pentru sistemele discrete, se poate face următoarea detaliere. Dacă semnalele discrete procesate sunt semnale eşantionate. sistemul automat se numeşte sistem automat cu eşantionare. Dacă semnalele discrete procesate sunt semnale numerice, sistemul automat se numeşte *sistem automat numeric*. Se va face distincţia cuvenită între "sistem automat numeric", definit anterior şi "automatul" ca sistem cu stări finite.

Termenul de sistem automat numeric trebuie asociat cu procesarea numerică a semnalelor, pe baza unui algoritm implementat pe un echipament numeric.

1.2. Teoria sistemelor discrete

O schemă a unui sistem cu informaţii discrete a fost prezentată în fig 1 1 Momentele de timp în care semnalul de la intrarea CAN este convertit în semnalul numeric sunt numite momente de eşantionare. Timpul dintre aceste momente este denumit perioadă de eşantionare şi se notează cu T. Uzual este utilizată eşantionarea periodică, dar există şi alte posibilităţi. De exemplu, este posibil să se utilizeze diferite perioade de eşantionare pentru diferite bucle ale unui sistem Aceasta este numită eşantionare multiplă.

Singura diferenţă între un sistem discret şi un sistem analogic continuu este că legea de reglare este implementată folosind un calculator numeric, deci numărul de legi de reglare ce pot fi folosite este mult mai mare.

Pare clar că sistemul din fig. 1.1. se va comporta ca un sistem continuu dacă perioada de eşantionare este aleasă suficient de mică. Am fi tentaţi să credem că nu este necesară o teorie pentru sistemele discrete. Acest lucru este fals deoarece se poate arăta că sistemele discrete pot conduce la performanţe mai bune decât echivalentele lor continue.

Fie o parte fixată de tipul dublu integrator. Un astfel de proces poate fi uşor controlat prin reacţie după stare. În fig. 1.3 este prezentat răspunsul indicial al unui astfel de sistem cu reacţie după stare în cazul continuu şi în cazul discret, utilizând o perioadă mică de eşantionare.

Utilizând tot reacţia după stare ca metodă de reglare, dar un alt algoritm de reglare şi o altă perioadă de eşantionare, mai mare, se obţine rezultatul din fig. 1.4.

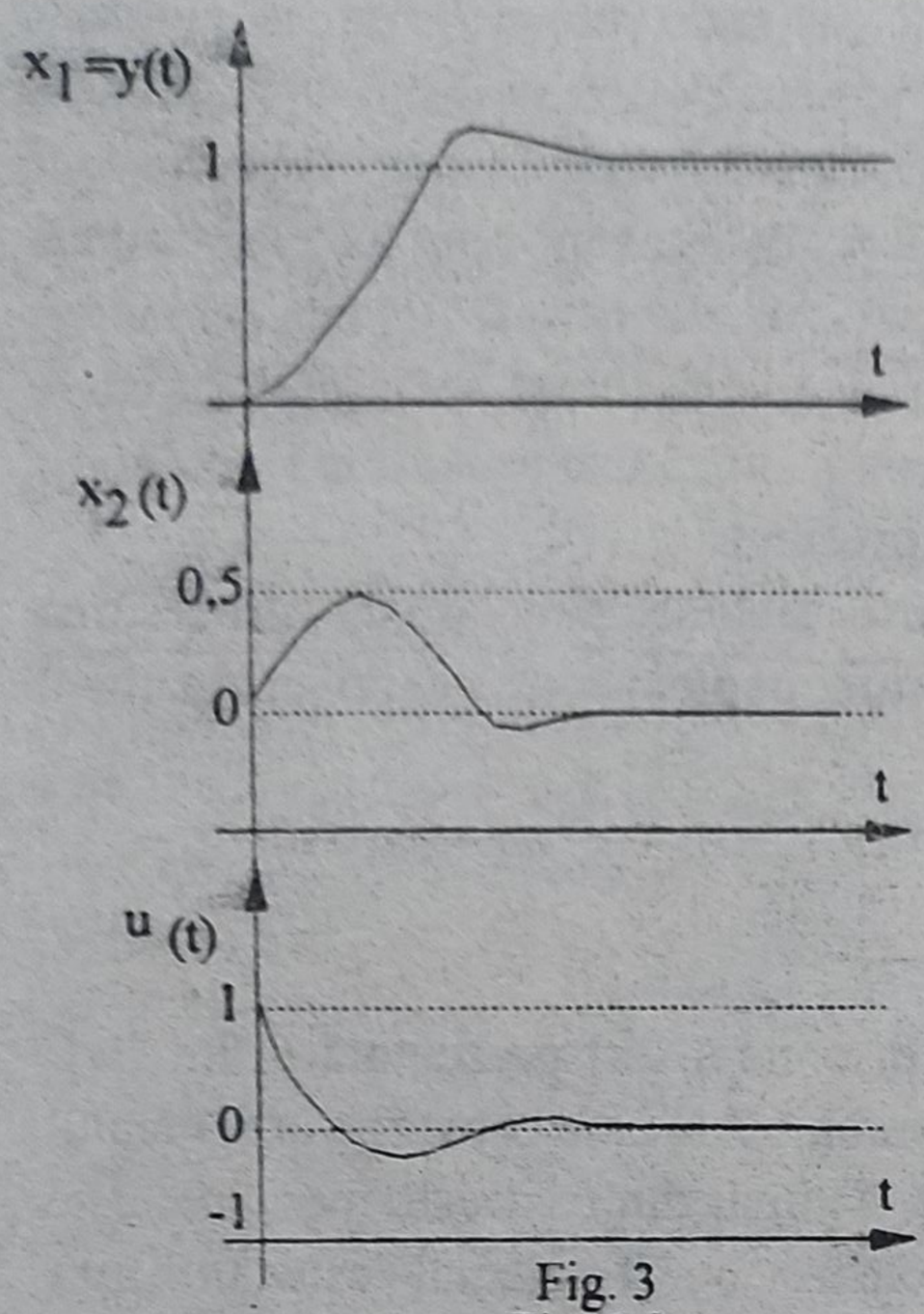


Fig. 3
Fig. 1.3.

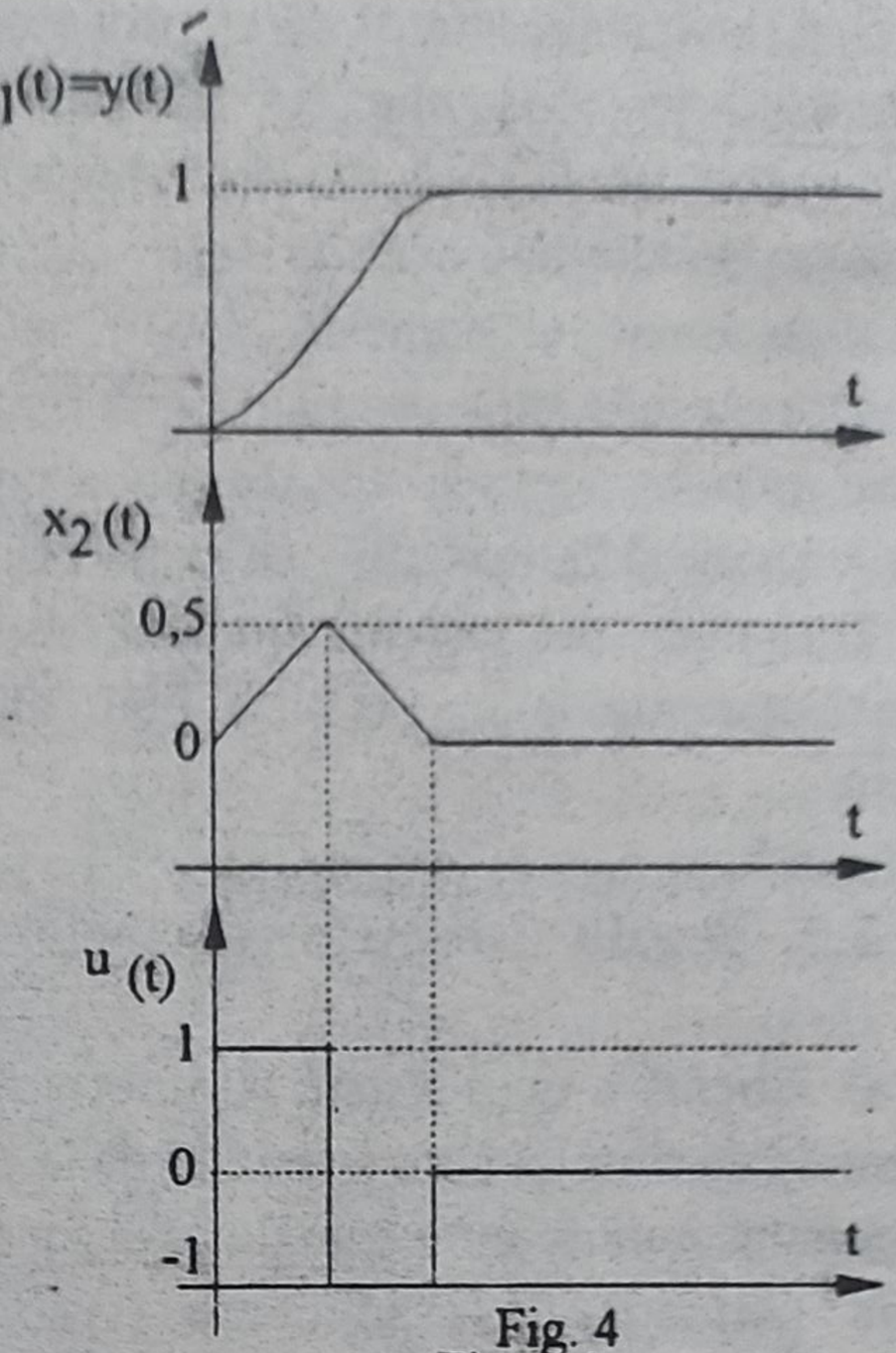


Fig. 4
Fig. 1.4.

Strategia de control folosită este numită deadbeat control. O comparație între cele două răspunsuri obținute relevă un regim tranzitoriu mai scurt în al doilea caz și absența suprareglării. Se observă, de asemenea, din fig. 1.3 că semnalele ajung la echilibru pe valori constante după un timp finit. Acest lucru nu poate avea loc în cazul sistemelor continue din cauză că soluția acestor sisteme este o sumă de funcții care sunt produse de polinoame și funcții exponențiale. De asemenea, de remarcat că perioada de eșantionare folosită în al doilea caz este de 5 ori mai mare decât perioada utilizată în aproximarea sistemului de control continuu din fig. 1.3.

Acest exemplu demonstrează clar că, chiar în cazul liniar, o lege de reglare mai bună decât aproximarea regulatorului continuu este posibilă.

1.3. Sisteme esențial discrete

Modelele discrete sunt descrieri naturale ale multor fenomene. Teoria sistemelor discrete are deci, multe aplicații în afara domeniului controlului automat.

a) Sisteme discrete ca modele pentru algoritmi implementați pe calculator

Algoritmii în calculatoare pot fi descrişi ca sisteme cu informaţii discrete. Acest fapt va fi ilustrat pe un algoritm iterativ şi o aplicaţie de timp real.

Să presupunem că soluţia unei ecuaţii este de forma $x - f(x) = 0$. O cale de a găsi soluţia este de a porni dintr-o stare iniţială şi de a folosi relaţia iterativă (algoritmul lui Picard) $x_{(k+1)} = f(x_{(k)})$ unde $x_{(k)}$ este iteraţia cu numărul k. Algoritmul numeric poate fi implementat ca un sistem discret în care timpul reprezintă numărul de iteraţii.

Fie ecuaţia $f(x)=3-\sqrt{x}$. În acest caz soluţia poate fi găsită analitic ca fiind $(7-\sqrt{3})/2 \approx 1{,}697$. Se obţine secvenţa de iteraţii din fig. 1.5 dacă se porneşte din starea iniţială x(0)=0.

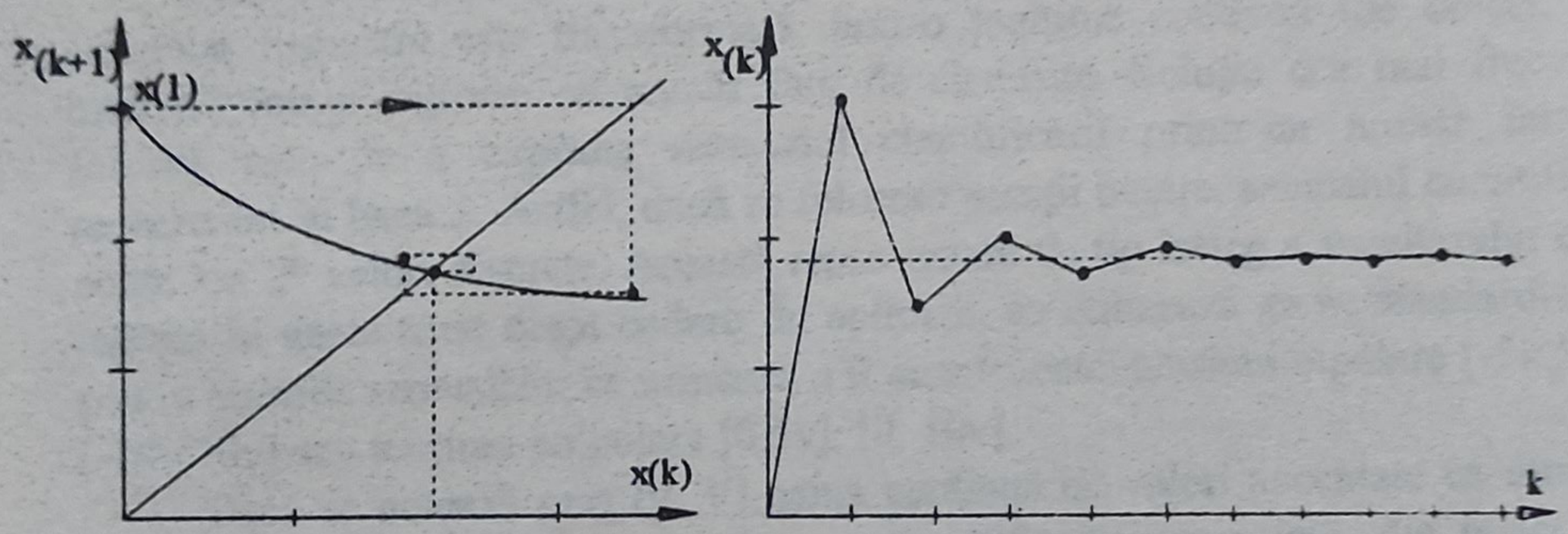


Fig. 1.5.

b) eşantionarea datorată efectuării măsurătorilor

În numeroase situaţii eşantionarea apare natural în conexiune cu procedurile de măsurare.

- **Radarul**. Când antena radarului se roteşte, informaţia pe o direcţie dată este deţinută o dată la o rotaţie completă a antenei. Un sistem cu eşantionare este deci calea naturală de a descrie sistemul radar. Tentativa de a descrie sistemul radar a fost de fapt unul din punctele de plecare a sistemelor cu eşantionare.

- **Sistemele economice**. Contabilitatea este strâns legată de curgerea timpului. Deşi tranzacţii pot apare în orice moment, informaţii despre variabilele importante sunt acumulate şi furnizate la anumite momente de timp (zilnic, săptămânal, lunar etc.).

c) Eşantionarea datorată operării pulsatorii

Multe sisteme sunt inerent eşantionate din cauză că informaţia se transmite sub formă de impulsuri. Circuitele electronice constituie în acest sens un exemplu

tipic. Acestea au constituit, de asemenea, o sursă de inspirație pentru dezvoltarea teoriei sistemelor discrete.

1.) **Tiristorul**. Circuitele electronice de putere sunt sisteme discrete. Curentul prin tiristoare este sincronizat cu o periodicitate determinată de sursa de alimentare.

2.) **Motoarele cu combustie internă**. Injecția poate fi privită ca un ceas ce sincronizează funcționarea motorului. Un puls de cuplu este generat la fiecare injecție.

3.) **Sistemele biologice**. Acestea sunt fundamental eșantionate deoarece transmisia semnalelor în sistemul nervos este sub formă de impulsuri.

II. Discretizarea semnalelor

Discretizarea semnalelor, aşa cum a reieşit şi din capitolul anterior, se referă la discretizarea semnalelor în nivel (cuantificare) şi la discretizarea semnalelor în timp (eşantionare).

2.1. Cuantificarea semnalelor

Prin cuantificarea unui semnal, mulţimea valorilor funcţiei ce defineşte semnalul respectiv este transformată dintr-o mulţime continuă (de obicei, un interval) într-o mulţime cu număr finit de elemente. Soluţia cea mai frecvent folosită este de a exprima rezultatul cuantificării printr-un număr întreg. reprezentat în baza 2. Astfel, dacă se folosesc poziţii binare, semnalul cuantificat poate lua 2^n valori discrete. Această reprezentare de tip întreg a rezultatului este referită în unele texte drept codare. În aplicaţii, se utilizează game standardizate pentru valorile semnalelor ce urmează a fi cuantificate: tensiuni bipolare [-5v,5v], [-10v,10v] sau tensiuni unipolare [0,5v], [0, 10v].

Dacă se notează prin [v, V] gama continuă de valori acceptate ca intrare într-un cuantificator cu n poziţii binare, cuantificarea reprezintă, din punct de vedere matematic, surjecţie de la mulţimea [v, V] la mulţimea $\{0, 1, \ldots 2^n-1\}$.

În practică se urmăreşte realizarea unei cuantificări uniforme, care, în cazul unei game de valori [v, V], utilizând n poziţii binare, se caracterizează prin *nivelul de cuantificare*: $q = (V - v)/2^n$.

Pentru o gamă unipolară [0, V], aplicaţia care realizează cuantificarea uniformă $f:[0,V]\to\{0, 1, \ldots 2^n-1\}$ se defineşte prin:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,(1/2)q)\\ i & x\in[i_q-q/2,\ i_q+q/2) \quad i\in\overline{1,2^n-2}\\ 2^{n-1} & x\in[V-(3/2)q, v].\end{cases}$$

Se observă că pentru orice valoare $x \in [0, V]$ se va aproxima prin rotunjire cu valoarea x_i^i. Eroarea de rotunjire va satisface, în modul, egalitatea $|e| \le \frac{1}{2}q$

pentru orice $x \in [0, V-\frac{1}{2}q]$ adică pentru toată gama [0, V] cu excepția intervalului $(V-\frac{1}{2}q, V]$.

Din cele enunțate anterior se constată că valoarea maximă a erorii introduse prin cuantificare este dată de lungimea convertorului n (numărul de poziții binare ale acestuia): $|e| \leq V/2^{n+1}$.

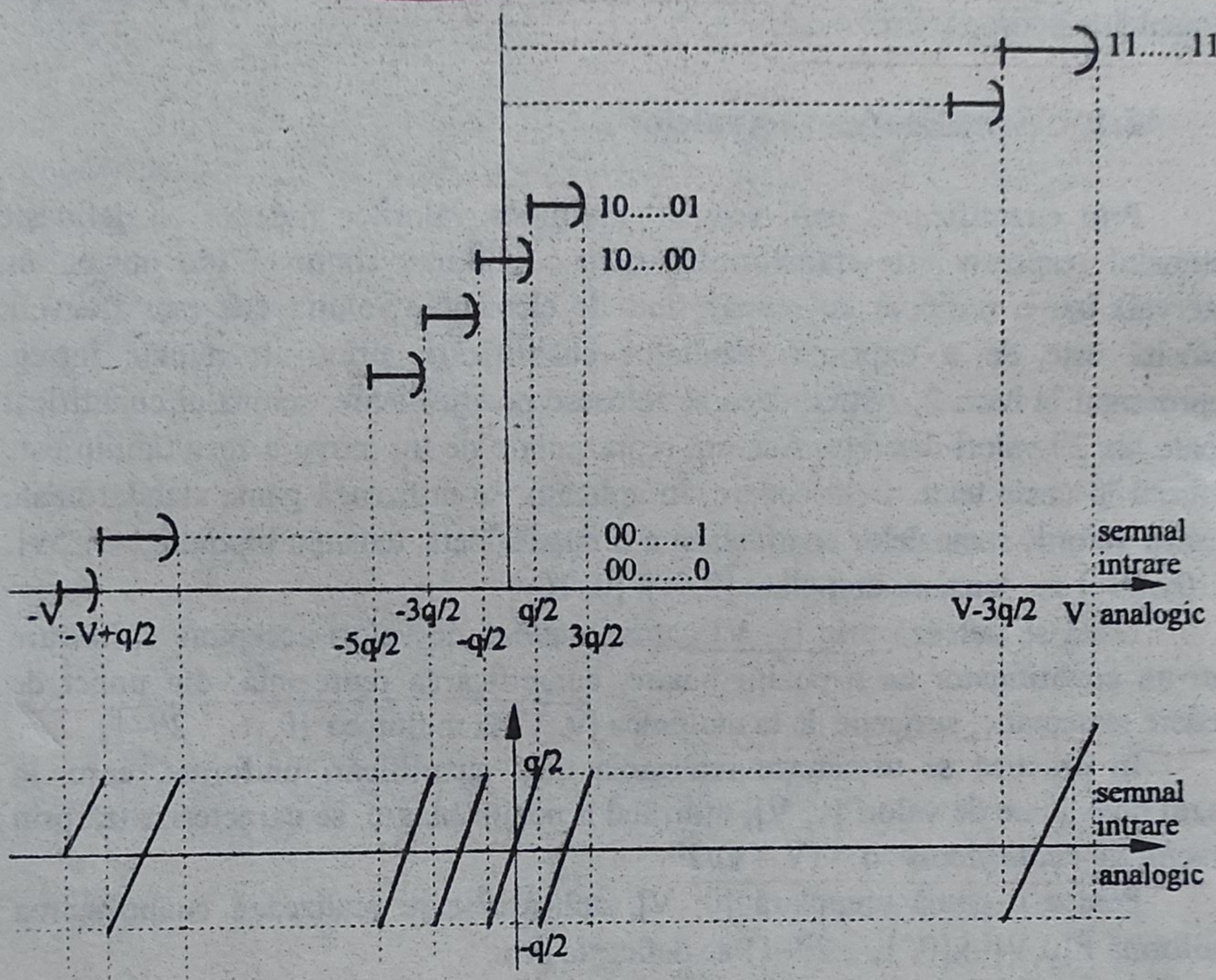


Fig.2.1

Convertoarele A/N standardizate utilizează uzual cuvinte cu n = 8 sau 12. Convertoarele cu $n \geq 16$ se folosesc numai în aplicații speciale.

Cele spuse în cazul gamelor unipolare rămân valabile și în cazul gamelor bipolare, cu observația că în această situație însă caracteristica de cuantificare va ține cont de modul de codificare binar al întregilor cu semn algebric.

Caracteristica intrare-ieșire ideală a unui bloc CAN este reprezentată în fig.2.1 pentru gama bipolară [-V, V], unde $q = 2V / 2^n$. De asemenea, în această figură este prezentată eroarea de cuantizare e.

Cuantificarea realizată de CAN conduce la concluzia că acesta este un element neliniar. Consecinţele rotunjirii şi cuantificării depind de sistemul în care este înglobat CAN. O descriere a efectelor cuantificării conduce la un model neliniar, dificil de analizat. Important este faptul că pentru $n \geq 10$ neliniaritatea pe care o introduce caracteristica de cuantificare poate fi neglijată în aplicaţiile practice.

Se poate defini şi eroarea absolută, care caracterizează complet calitatea unei aproximări. Pentru o valoare oarecare $x \in [0, V-q/2)$, eroarea relativă δe satisface relaţia: $|\delta e| - \frac{|x - x_i|}{|x|} = \frac{|e|}{|x|} \leq \frac{q}{2|x|}$.

Din ultima relaţie rezultă că trebuie urmărit ca amplitudinea semnalului ce se cuantifică $|x|$ să fie sensibil mai mare decât nivelul cuantei q.

2.2. Eşantionarea semnalelor

Informaţia primită de un sistem automat discret nu este continuă în raport cu timpul, ci sub formă de impulsuri care au loc în momente definite de timp.

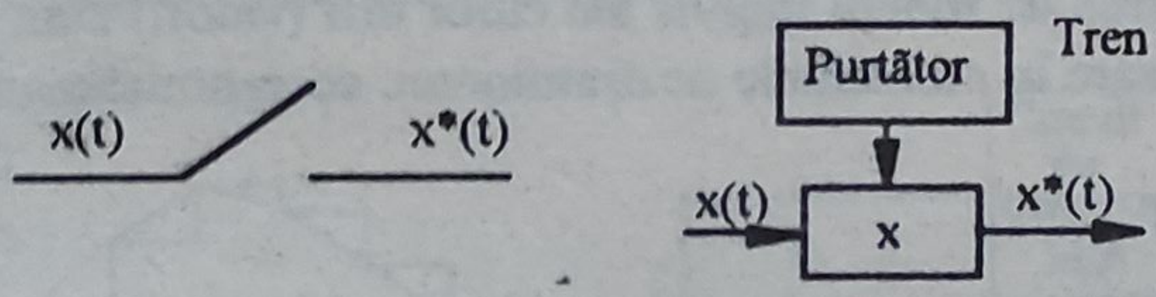


Fig.2.2.

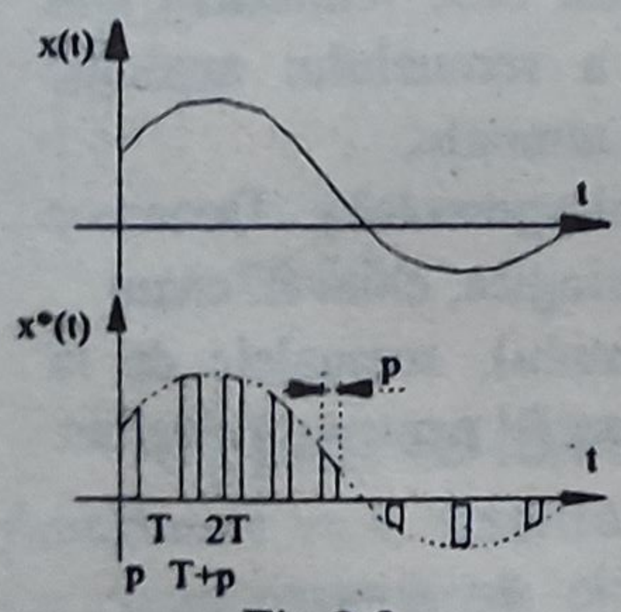


Fig.2.3

Matematic, semnalul constituit din impulsuri purtătoare de informaţie poate fi reprezentat printr-o operaţie de eşantionare descrisă cu ajutorul unui element numit eşantionor.

Dacă funcţionarea eşantionorului este periodică se spune că eşantionarea este uniformă. Formele semnalelor de intrare şi de ieşire ale unui dispoziţiv cu eşantionare uniformă sunt date în fig.2.3.

Semnalul de ieşire al eşantionorului, notat $x^*(t)$ este un tren de impulsuri modulate în amplitudine de durată p, mult mai mică decât perioada de eşantionare T.

Pentru a obţine un model matematic care să simplifice metodele de analiză şi sinteză, este definit "eşantionorul ideal", al cărui semnal de ieşire conţine un

tren de funcţii impuls (Dirac). Un dispozitiv de eşantionare ideal este figurat în fig.2.4.

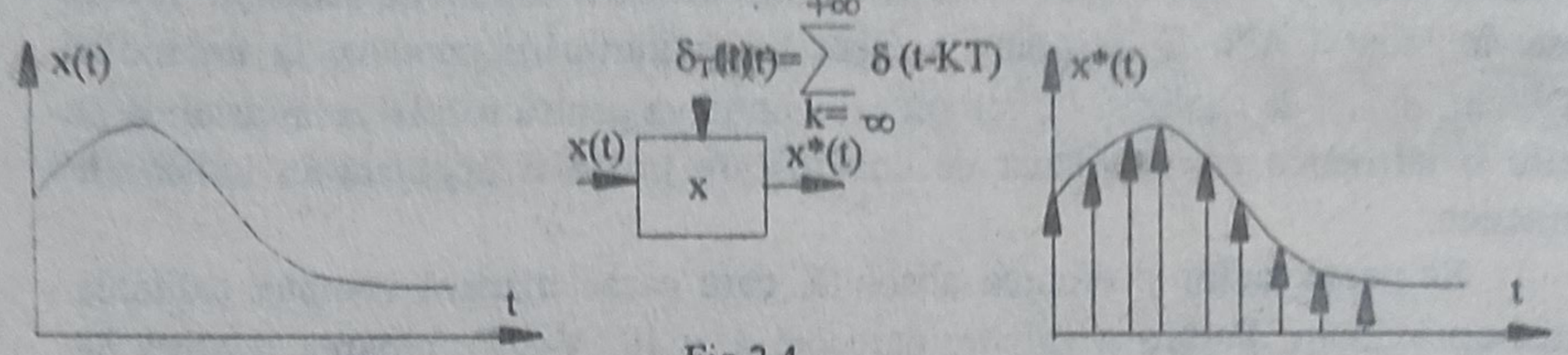


Fig.2.4.

Această aproximare este justificată dacă lăţimea impulsurilor din semnalul de ieşire al eşantionorului este foarte mică în raport cu perioada T şi cu cuanta de timp dominantă a semnalului continuu. Semnalul de ieşire notat x*(t) este un tren de funcţii impuls modulate în amplitudine.

$$x^*(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT)\delta(t-kT)$$

în care δ(t-KT) reprezintă o funcţie impuls unitară a cărui salt are loc la momentul t = KT. Ultima ecuaţie indică faptul că semnalul de ieşire al eşantionorului ideal este un tren de funcţii impuls ale căror arii (valori) sunt egale cu valorile semnalului de intrare în momentele de eşantionare corespunzătoare kT.

2.3. Conversia A/N

Figura 2.5 detaliază blocul CAN din fig.1.1. Acest bloc realizează atât funcţia de cuantificare cât şi funcţia de eşantionare a semnalului analogic continuu de la intrarea sa şi furnizează la ieşire un semnal numeric.

Filtrele prezentate în fig.2.5 sunt destinate eliminării zgomotelor. Deoarece în practică se achiziţionează adesea mai multe semnale analogice, chiar în cazul unui proces monovariabil (reglarea după stare de exemplu), semnalele de la ieşirea filtrelor trece-jos sunt multiplexate. Se procedează astfel pentru a folosi un

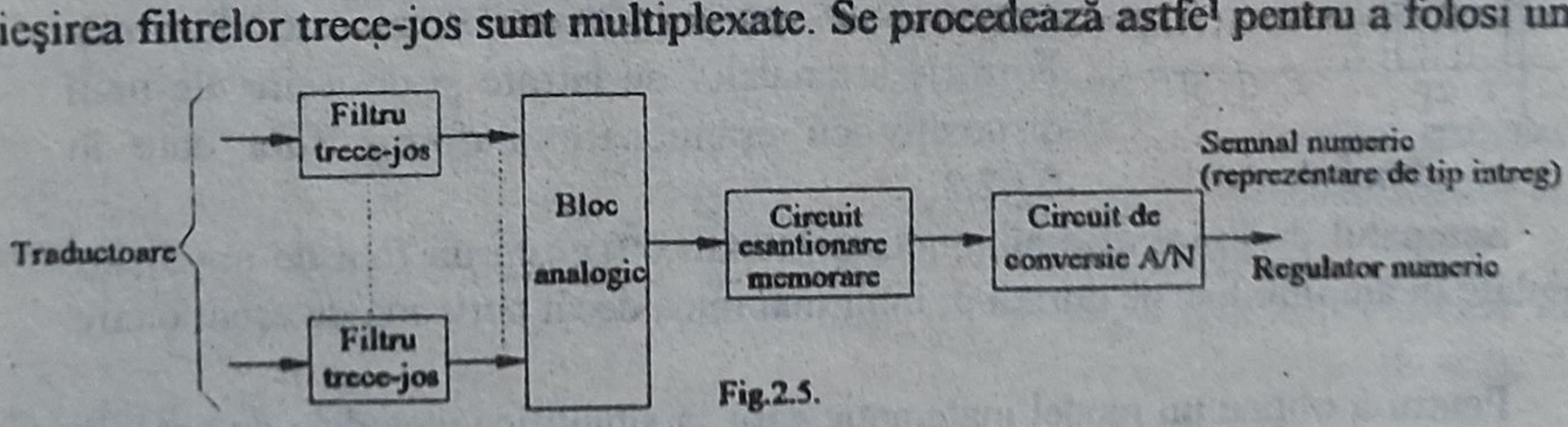


Fig.2.5.

singur circuit de conversie A/N, care este, în general, scump. Ulterior semnalul este eşantionat şi memorat.

Schema de principiu a unui circuit de eşantionare-memorare este prezentată în fig.2.6 şi se bazează pe memorarea tensiunii de către un condensator C. Când comutatorul este închis, tensiunea pe C urmăreşte semnalul de la intrarea circuitului, circuitul funcţionând în regim de urmărire. Când comutatorul este deschis, circuitul funcţionează în regim de memorare şi condensatorul C îşi menţine tensiunea constantă.

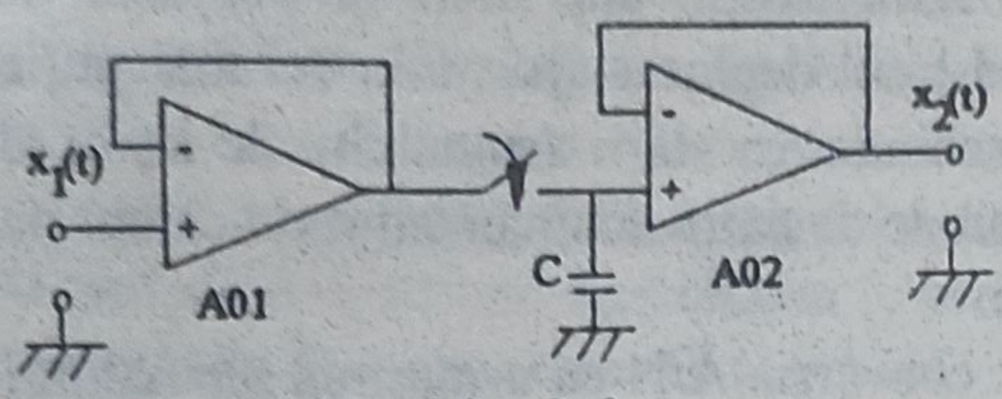


Fig. 2.6

Circuitul este comandat periodic cu perioada T. Durata eşantionării (comutatorul în poziţia închis) se consideră neglijabilă în raport cu T. Circuitul de eşantionare-memorare transformă semnalul analogic de la intrare într-un semnal analogic constant pe porţiuni (fig.2.7)

Circuitul de conversie A/N transformă semnalul analogic eşantionat într-un semnal numeric. Această transformare implică şi operaţia de cuantificare descrisă anterior. Un convertor A/N adesea utilizat în practică este convertorul A/N cu aproximaţii succesive, având schema bloc din fig.2.8.

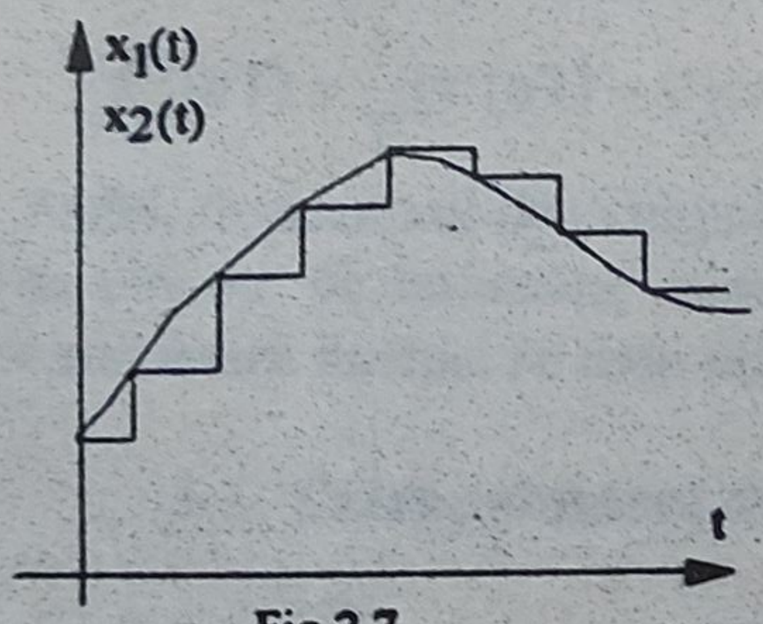


Fig.2.7

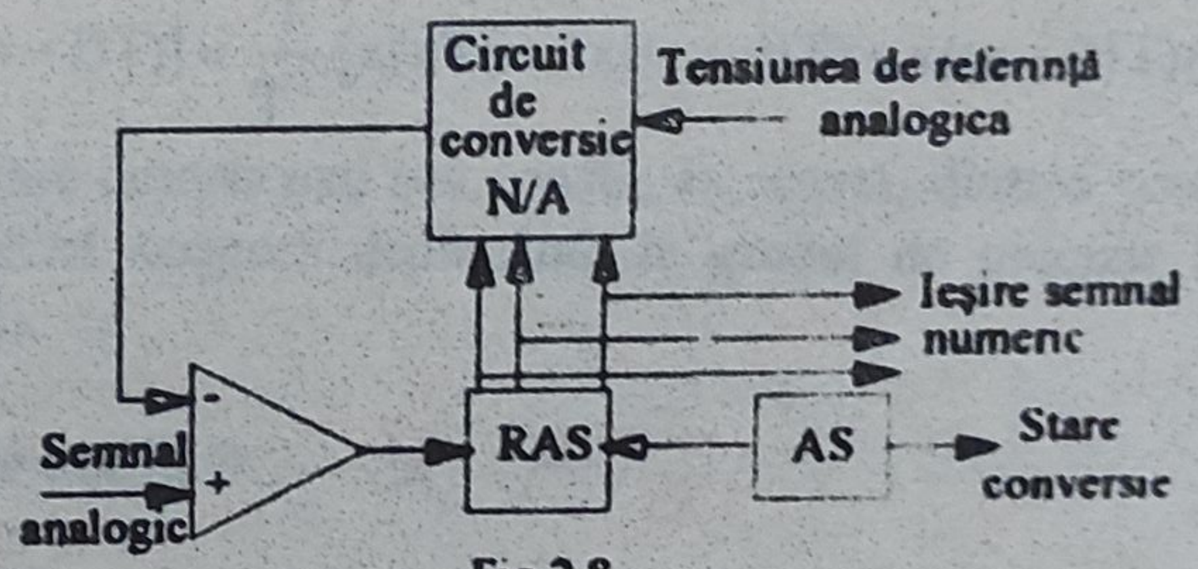


Fig.2.8

Un astfel de convertor înglobează un circuit de conversie N/A (a cărui funcţionare va fi descrisă ulterior), un registru de aproximaţii succesive (RAS). un comparator şi un circuit de comandă sau automat de stare (AS). După iniţializarea convertorului, RAS, care are n pozitii binare, acesta este setat cu o valoare egală cu jumătatea valorii maxime, poziţionând pe 1 bitul cel mai semnificativ iar restul biţilor pe 0. Circuitul de conversie N/A va furniza la ieşire o tensiune egală cu jumătatea gamei de variaţie a tensiunii de ieşire, ce se

compară cu tensiunea de măsurat analogică. Dacă tensiunea obținută de CNA este mai mare decât tensiunea de măsurat, bitul cel mai semnificativ este adus la "0". Dacă tensiunea de la CNA este mai mică decât tensiunea de măsurat, bitul cel mai semnificativ este menținut în 1 logic. La următorul tact al AS, este poziționat în 1 logic următorul bit ca semnificație din RAS şi procesul de aproximări succesive se repetă până când bitul deplasat ajunge în cel mai puțin semnificativ bit al RAS, care determină schimbarea stării semnalului de ieşire al interfeței, care indică că datele sunt accesibile de către echipamentul de calcul pe care este implementat regulatorul numeric.

Alte metode de conversie A/N sunt: conversia A/N cu urmărirea semnalului de intrare, conversia A/N cu integrare, conversia A/N cu pantă dublă (dublă integrare).

III. Reconstituirea semnalelor continue

Fiind dată o succesiune de numere x(nT) ca cea reprezentată în fig.2.4 se pune problema restabilirii semnalului continuu inițial x(t) din informația conținută în acest tren de impulsuri (sau dintr-o succesiune de valori numerice). În esență procesul de reconstituire a datelor poate fi considerat ca un proces de extrapolare. O metodă o constituie dezvoltarea în serie de puteri a lui x*(t) în intervalul dintre momentele de eşantionare nT şi (n+1)T.

$$nT \le t < (n+1)T \quad x_n(t) = x(nT) + x'(nT)(t-nT) + \frac{x''(nT)}{2!}(t-nT)^2 + \dots \quad (3.1)$$

Pentru a evalua coeficienții seriei trebuie obținute derivatele funcţiei x(t) în momentele de eşantionare. Deoarece informația referitoare la x(t) există numai în momentele de eşantionare, aceste derivate trebuie estimate din succesiunea de funcții impuls. O expresie simplă a primei derivate este:

$$x'(nT) = \frac{1}{T}[x(nT) - x((n-1)T)].$$

O valoare aproximativă a celei de-a doua derivate este dată de:

$$x''(nT) = \frac{1}{T}[x'(nT) - x'((n-1)T)] = \frac{1}{T^2}[x(nT) - 2x((n-1)T) + x((n-2)T)]$$

Astfel, dispozitivul de extrapolare descris mai sus constă, în esență, dintr-o serie de circuite de întârziere, numărul acestora depinzând de gradul de precizie a aproximării funcției de timp x(t).

3.1. Extrapolatorul de ordin 0

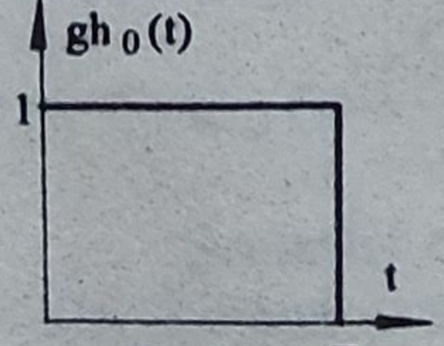


Fig. 3.1

Când este folosit numai primul termen al seriei de puteri din relația (3.1), dispozitivul este denumit dispozitiv de reținere de ordin 0. Relația (3.1) devine pur şi simplu $x_n(t)=x(nT)$. Răspunsul la impuls al circuitului de reținere este dat în fig. 3.1. Se observă că acesta, practic, menține valoarea din momentul eşantionării pe durata unei perioade. Un astfel de extrapolator este circuitul de eşantionare-memorare din fig.3.1, care mai este denumit şi "sample and hold". Circuitul de reținere de ordin 0 serveşte pentru a descompune impulsurile de intrare într-o serie de unde dreptunghiulare cu lățimea T.

Funcţia de transfer a extrapolatorului de ordin 0 poate fi dedusă din fig. 3.1.

$$G_{h_0}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \tag{3.2}$$

Spectrul de frecvenţă al extrapolatorului de ordin 0 se poate deduce din:

$$G_{h_0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{e^{-\frac{j\omega T}{2}}\left(e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}}\right)}{j\omega} =$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{-\frac{j\omega T}{2}}}{\omega} = T\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{-\frac{\omega T}{2}}}{\frac{\omega T}{2}}.$$

Pe baza ultimei relaţii se pot trasa diagramele Bode pentru acest circuit.

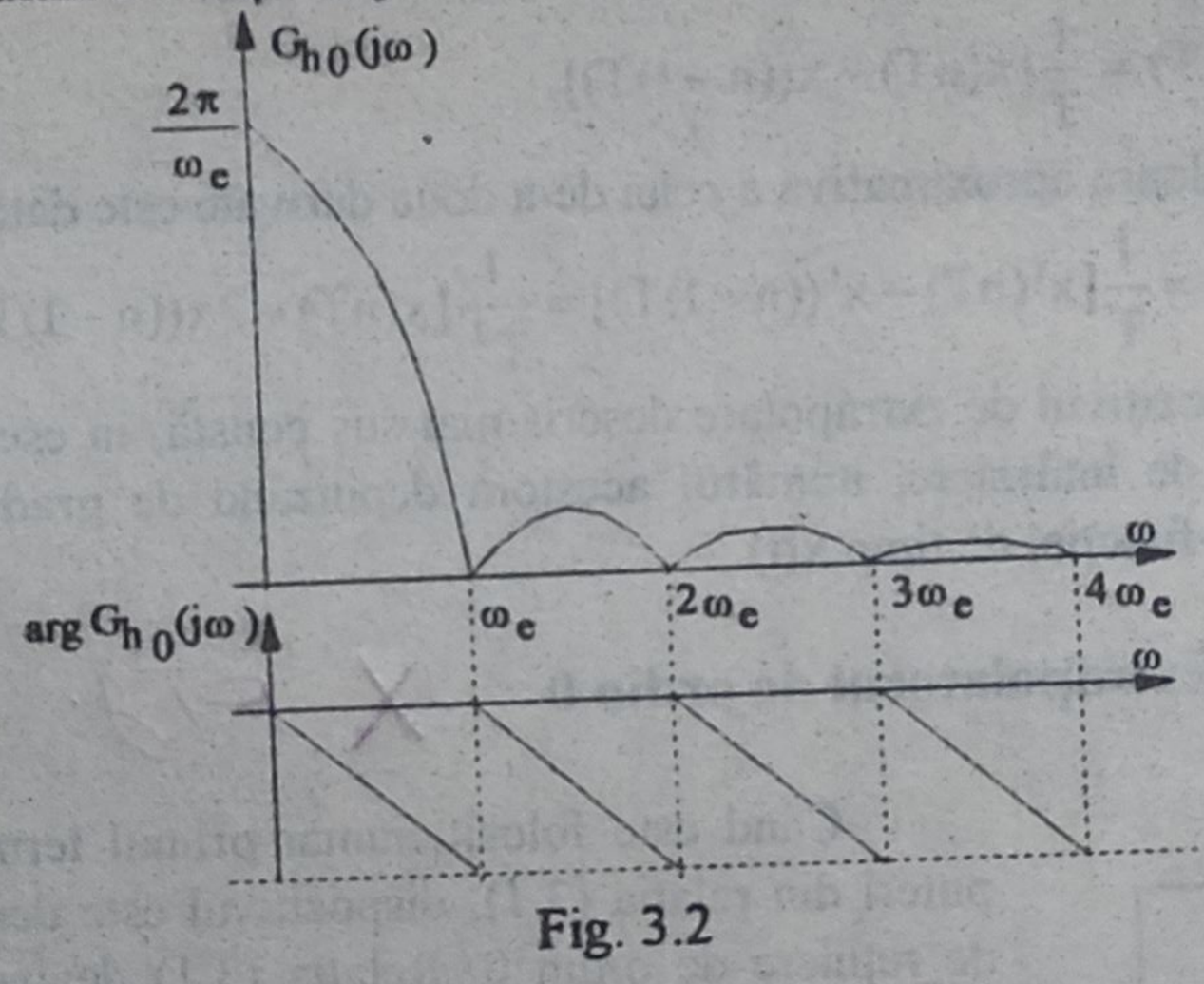


Fig. 3.2

$\omega_e = \frac{2\pi}{T}$ = pulsaţia de eşantionare;

$$G_{h_0}(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_e}\frac{\sin\pi\frac{\omega}{\omega_e}}{\frac{\omega}{\omega_e}}e^{-j\pi\frac{\omega}{\omega_e}}.$$

Din fig.3.2 se observă că acest circuit este în esență un filtru trece-jos. De asemenea, rezultă că acesta are o comportare în frecvență ce depinde de pulsația de eșantionare.

3.2. Extrapolatorul de ordin 1

Dacă primii 2 termeni ai seriei de puteri din (3.1) sunt folosiți pentru a extrapola funcția de timp x(t) între 2 momente de eșantionare (nT) și (n+1)T, dispozitivul se numește extrapolator de ordin 1.

$$x_n(t) = x(nT) + x'(nT)(t - nT); \quad x'_n(t) = \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T} \Rightarrow$$

$$x_n(t) = x(nT) + \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T}(t - nT). \qquad (3.3)$$

Răspunsul indicial al acestui dispozitiv este prezentat în fig.3.3.

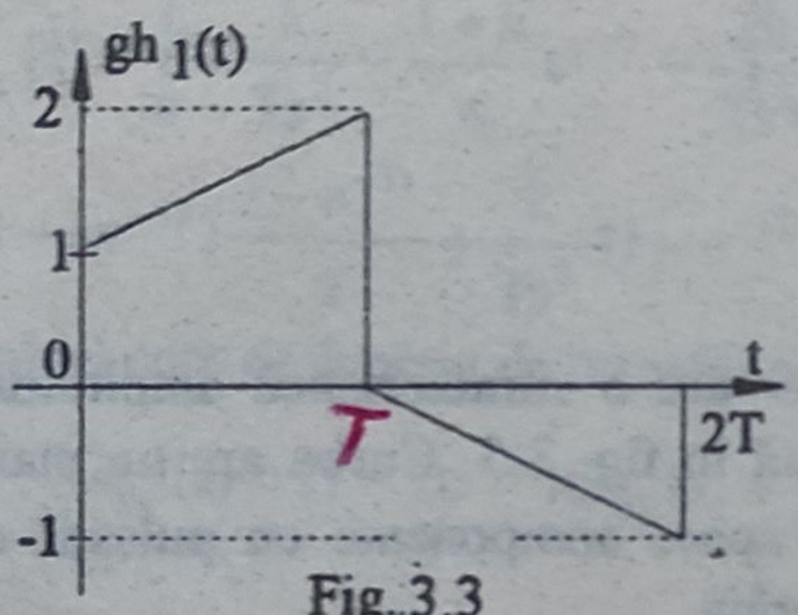


Fig.3.3

$$X_0(t) = X(0) + \frac{X(0) - X(-T)}{T}t$$

$X(0) = 1$: $X(-T) = 0$

pt. $0 \le t < T$ $gh_1(t) = X_0(t) = 1 + \frac{t}{T}$

pt. $T \le t < 2T$ $gh_1(t) = X_1(t) = 1 - \frac{t}{T}$

$$X_1(T) = X(T) + \frac{X(T) - X(0)}{T}(t - T)$$

$e(0) = 1$; $e(T) = 0$.

Pentru t > 2T răspunsul indicial este nul. Funcția de transfer a extrapolatorului de ordin 1 se deduce direct din răspusul la impuls și rezultă (vezi relația (3.3)):

$$G_{h_1}(s) = \frac{1 + Ts}{T}\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right)^2. \qquad (3.4)$$

Semnalul continuu reconstituit cu un astfel de extrapolator arată ca în fig 3.4. S-a constatat că prin micșorarea periodei de eșantionare, extrapolatorul de ordin unu dă o aproximare mai bună semnalului față de cazul utilizării extrapolatorului de ordin 0. Răspunsul la frecvență al extrapolatorului de ordin 1 se poate obține ca fiind dat de:

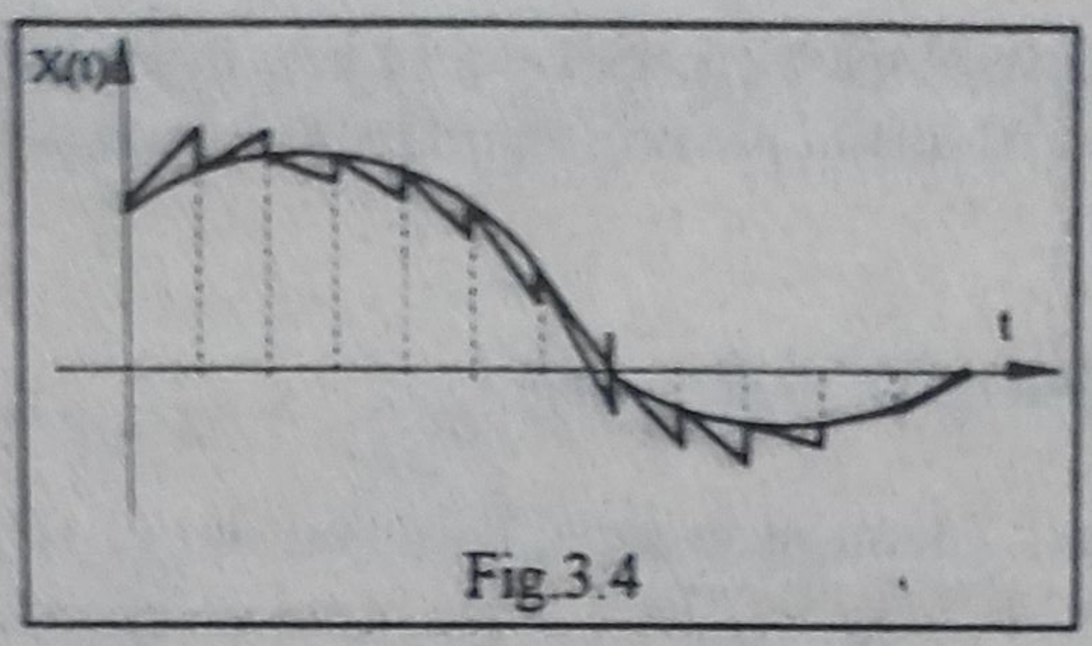


Fig.3.4

$$G_{h_1}(j\omega) = \frac{1+j\omega T}{T}\left(\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left|G_{h_1}(j\omega)\right| = \frac{2\pi}{\omega_e}\sqrt{\left(1+\frac{4\pi^2\omega^2}{\omega_e^2}\right)}\frac{\left(\sin\pi\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2}{\left(\pi\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2} \qquad \omega_e = \frac{2\pi}{T} \qquad (3.5)$$

$$\arg G_{h_1}(j\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\omega}{\omega_e}\right) - \frac{2\pi\omega}{\omega_e}.$$

Se observă că acest tip de extrapolator are o caracteristică amplitudine-frecvență mai abruptă. Aceasta este prezentată în fig. 3.5. Curba are un maxim între 0 și ω_e, ceea ce indică faptul că pot apare componente cu pulsații mai ridicate dacă pulsația de eșantionare este coborâtă.

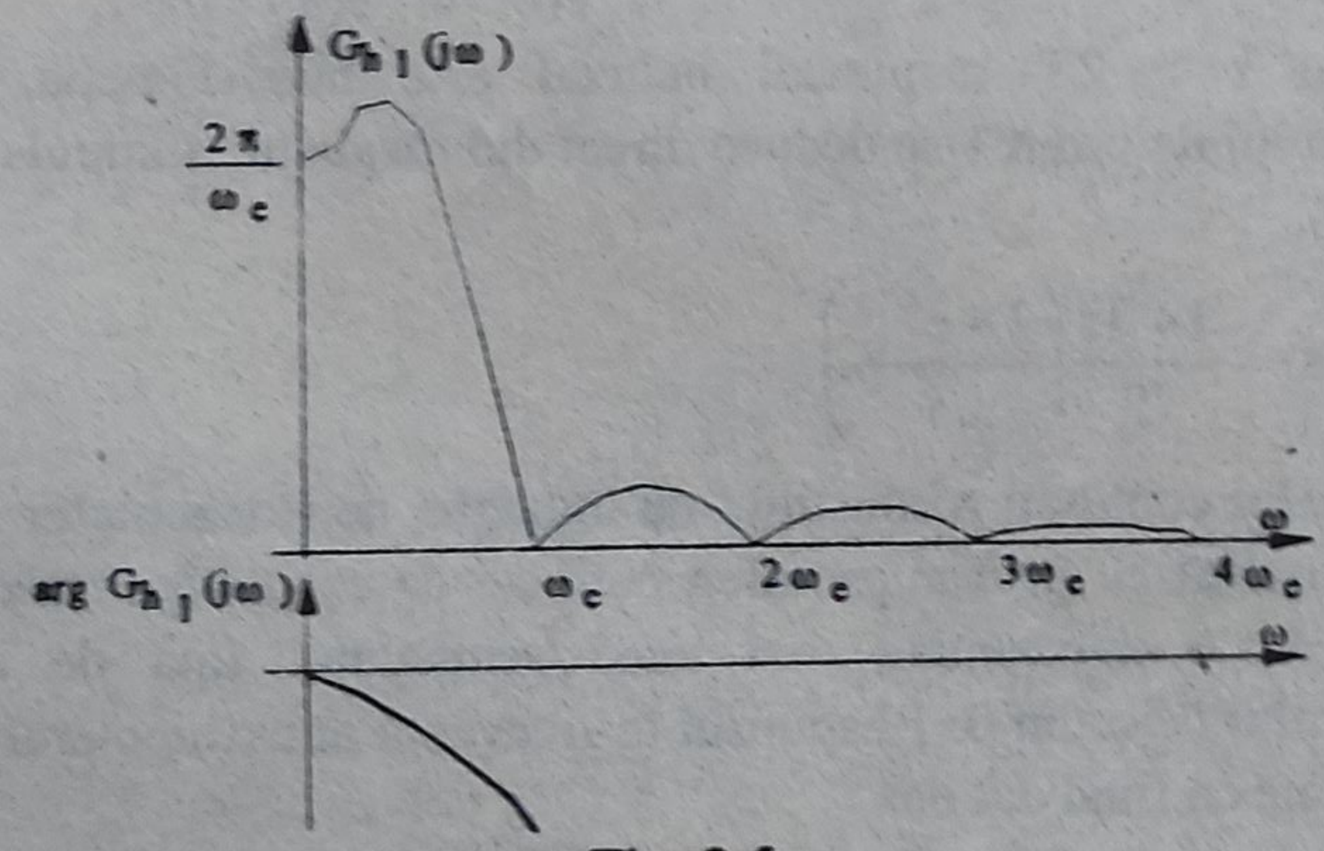


Fig. 3.5.

Se poate face observaţia că la pulsaţii joase defazajul introdus de extrapolatorul de ordin 0 depăşeşte pe cel al extrapolatorului de ordin 1, în timp ce la pulsaţii înalte fenomenul este invers. În sistemele automate în circuit închis, caracteristicile de frecvenţă ale funcţiei de transfer, la pulsaţie medie si ridicată, condiţionează stabilitatea sistemului. Utilizarea extrapolatorului de ordin 1 are o influenţă negativă asupra stabilităţii sistemelor automate.

3.3 Extrapolatorul de ordin fracţionar

Acesta rezultă printr-o modificare a extrapolatorului de ordin 1. Pentru un extrapolator fracţionar, semnalul de ieşire dintre 2 momente de eşantionare consecutive are o pantă K (unde K este subunitar).

$$gh_k(t)=\left(1+\frac{K_1}{T}\right)u(t)-(1+k)u(t-T)-\frac{2k}{T}(t-T)u(t-T)+ku(t-2T)+\frac{k}{T}(t-2T)u(t-2T).$$

$$G_{h_k}(t)=\frac{1}{s}+\frac{k}{Ts^2}-\frac{1+k}{s}e^{-sT}-\frac{2k}{Ts^2}e^{-st}+\frac{k}{s}e^{-2sT}+\frac{k}{Ts^2}e^{-2sT}+\ldots\approx$$

$$\approx(1-ke^{-Ts})\frac{1-e^{-Ts}}{s}+\frac{k}{Ts^2}(1-e^{-sT})^2$$

şi ţinând cont de funcţia de transfer a extrapolatorului de ordin 0 rezultă:

$$G_{h_k}(s)=(1-ke^{-Ts})G_{h_0}(s)+\frac{k}{T}[G_{h_0}(s)]^2. \qquad (3.6)$$

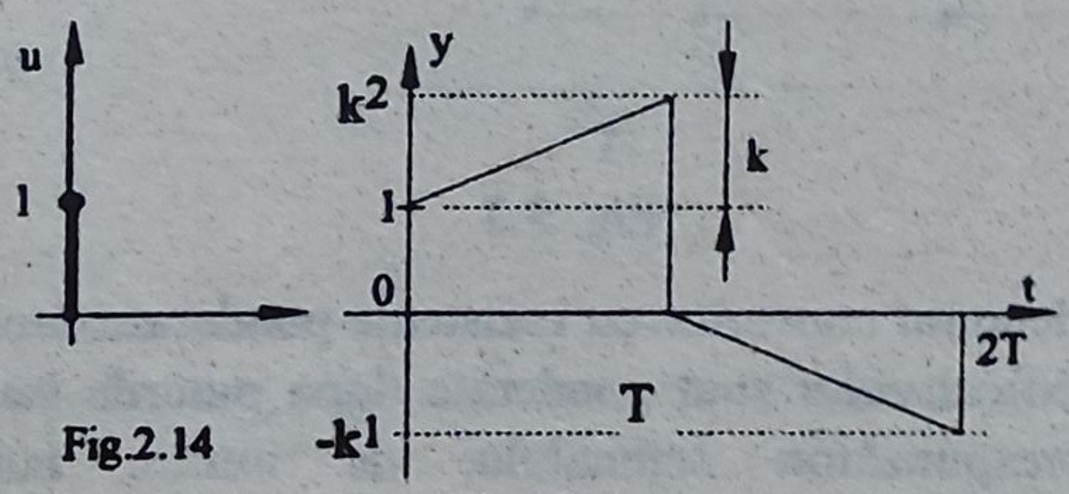


Fig.2.14

Fig. 3.6.

3.4 Extrapolatorul exponenţial

Extrapolarea unui semnal eşantionat poate fi făcută cu un filtru trece-jos obişnuit (un circuit RC). Dacă sunt folosiţi doar primii 2 termeni ai dezvoltării în

serie de puteri a lui e^{sT}, funcția de transfer a extrapolatorului de ordin 0 poate fi scrisă în felul următor:

$$G_{h_0}(s) = \frac{1-s^{-Ts}}{s} = \frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{e^{Ts}}\right) \approx \frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{1+Ts}\right) = \frac{T}{1+Ts}. \qquad (3.7)$$

Se obține astfel funcția de transfer a unui filtru trece-jos. Deoarece relația corespunde unei funcții pondere de tip exponențial, acest tip de extrapolator se descrie adesea ca un extrapolator exponențial.

3.5. Conversia N/A

Într-o buclă de reglare ca cea din fig.1.1 blocul care realizează funcția de reconstituire a semnalului continuu din semnalul discret este blocul CNA. Semnalul la ieşirea CNA va fi un semnal continuu cuantificat. Uzual extrapolatorul utilizat în CNA este de ordin 0.

Un circuit de conversie N/A adesea utilizat este cel prezentat în fig.3.7.

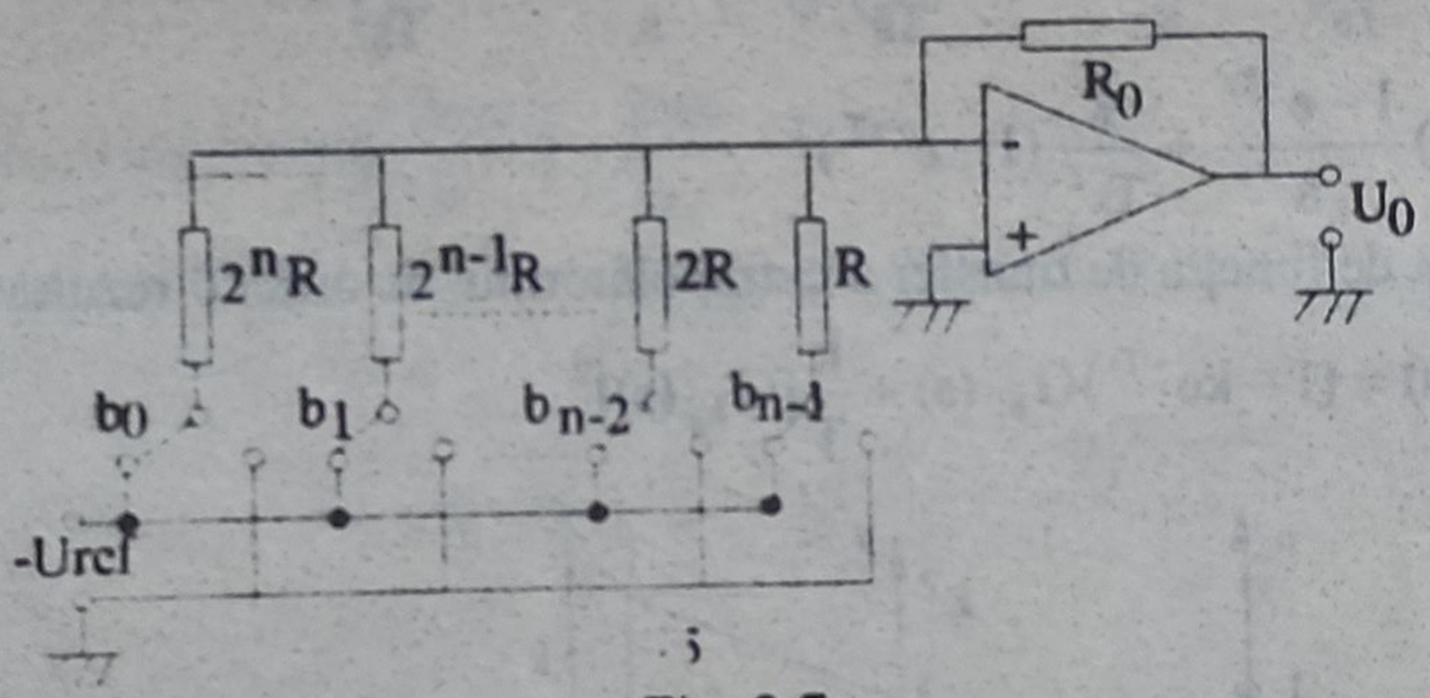


Fig. 3.7.

Acesta este denumit convertor cu rezistențe ponderate deoarece rezistențele de intrare ale amplificatorului sunt ponderate după puterile lui 2. Biții b_0, b_1, ...b_{n-2}, b_{n-1} corespunzători semnalului de intrare numeric comandă comutatoarele astfel: dacă bitul b_k este 1, rezistența aferentă este conectată la -Vref, iar dacă este zero logic, rezistența aferentă este conectată la masă. Valoarea tensiunii de ieşire este:

$$U_0 = \frac{R_0}{R}\left(b_{n-1} + \frac{b_{n-2}}{2} + \ldots + \frac{b_1}{2^{n-1}} + \frac{b_0}{2^n}\right)Uref.$$

Principalul dezavantaj al acestui tip de circuite de conversie îl constituie necesitatea utilizării unor rezistențe de valori cât mai precise într-un domeniu foarte larg, ce variază de la R la $2^{n-1}R$. Acest incovenient dispare în cazul circuitelor de conversie N/A cu rețele R-2R.

IV. Transformata Z

În capitolul II s-a arătat că semnalul obținut din "eşantionorul ideal" este modelat matematic ca fiind un tren de funcții impuls modulate în amplitudine de semnalul continuu aplicat la intrarea eşantionorului.

$$X^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(kT)\delta(t - kT). \tag{4.1}$$

Dacă funcția x(t) admite o transformată Laplace atunci şi funcția discretă $x^*(t)$ admite o transformată.

$$L\{x^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}\left(= \int_0^{\infty} x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)e^{-st}dt = \right). \tag{4.2}$$

Aplicând transformata Laplace funcției $x^*(t)$ se consideră implicit că x(t) este o funcție originală, adică:

a) $X(t) = 0, \forall t < 0$;

b) X(t) este derivabilă pe porțiuni;

c) $\exists M > 0$ şi $s \geq 0$ a. î. $|X(t)| \leq Me^{sT}\ \forall t \geq 0$.

Introducând notația $z = e^{sT}$ se poate defini transformata z a unei funcții discrete:

$$Z\{X(t)\} = L\{X^*(t)\}\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} X(kT)z^{-k}. \tag{4.3}$$

În continuare se va folosi notația $Z\{X(t)\}=X(z)$. Astfel, pentru o funcție continuă x(t) ce admite o transformată Laplace se poate defini în discret transformata Z.

Calculul transformatei z a unei funcții continue poate fi făcut în mai multe feluri.

a) prin determinarea valorilor funcției continue în momentele de eşantionare şi calculul seriei;

b) utilizarea tabelelor de transformate z directe (ce se găsesc în numeroase cărți);

c) metoda produsului de convoluție complex.

Ținând cont că $X^*(t) = X(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$ şi

$$L\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-kTs}=\frac{1}{1-e^{-Ts}}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$X^*(s)=X(s)\frac{1}{1-e^{-Ts}}=\frac{1}{2\pi j}\oint X(\chi)\frac{1}{1-e^{-T(s-\chi)}}d\chi \Rightarrow \qquad (4.4)$$

$$X(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint X(\chi)\frac{1}{1-z^{-1}e^{\chi T}}d\chi.$$

Integrala se estimează cu teorema reziduurilor.

Exemple

1. Să se calculeze transformata z a semnalului treaptă unitară 1(t) sau σ(t).

$$Z(t)=Z\{\sigma(t)\}=L\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sigma(t-kT)\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-kTs}\Big|_{z=\frac{1}{T}\ln z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}.$$

2. Să se calculeze transformata z a semnalului rampă unitară f(t) = t.

$$F(z)=Z\{f(t)\}=L\{f^*(t)\}=\int_0^{\infty}t\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)e^{-ts}dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}kTe^{-kTs}=\sum_{k=0}^{\infty}kTz^{-k}=Tz^{-1}+2Tz^{-2}+3Tz^{-3}.....kTz^{-k}+.....$$

$$Tz^{-1}+Tz^{-2}+Tz^{-3}.....Tz^{-k}+.....$$

$$+Tz^{-2}+Tz^{-3}.....Tz^{-k}+.....$$

$$+Tz^{-3}.....Tz^{-k}+.....=$$

$$=T\left(\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-3}}{1-z^{-1}}+.....\right)=\frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{Tz}{(z-1)^2}.$$

3. Să se calculeze transformata z a funcției exponențiale $f(t)=e^{-at}$.

$$Z\{f(t)\}=L\{f^*(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-at}e^{+ts}\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-akT}z^{-kT}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{aT}z^{kT}\right)^{-1}=\frac{1}{1-\left(e^{aT}z\right)^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-aT}}.$$

4. Să se calculeze transformata z a funcţiei $f(t) = \sin \omega t$.

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Z\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\omega}{\chi^2 + \omega^2} \frac{1}{1 - z^{-1} e^{\chi T}} d\chi = \operatorname{Re} z(f, j\omega) + \operatorname{Re} z(f, -j\omega) =$$

$$= \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - z^{-1} e^{\chi T}}\Bigg|_{\chi = j\omega} - \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - z^{-1} e^{\chi T}}\Bigg|_{\chi = -j\omega} = \frac{1}{2j}\left(\frac{+z}{z - e^{j\omega T}} + \frac{-z}{z - e^{-j\omega T}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2j} \frac{z\left(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}\right)}{z^2 - z\left(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}\right) + 1} = \frac{z\left(\dfrac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2}\right)}{z^2 - 2z\left(\dfrac{e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}}{2}\right) + 1} =$$

$$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}.$$

4.1. Proprietăţile transformatei z

1) Adiţia şi substracţia

$$F_1(z) = Z\{f_1(t)\} \quad F_2(z) = Z\{f_2(t)\} \tag{4.5}$$

$$Z\{f_1(t) \pm f_2(t)\} = F_1(z) \pm F_2(z).$$

Prin definiţie

$$Z\{f_1(t) \pm f_2(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} (f_1(kT) \pm f_2(kT)) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} f_2(kT) z^{-k} = F_1(z) \pm F_2(z).$$

2.Multiplicarea cu o constantă

$$Z\{af(t)\} = aZ\{f(t)\} = aF(z) \tag{4.6}$$

în care a este oconstantă.

De asemenea, prin definiţie

$$Z\{af(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} af(kT) z^{-k} = a \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = aF(z).$$

3. Teorema deplasării în real.

$$Z\{f(t-nT)\} = z^{-n}Z\{f(t)\} \tag{4.7}$$

Tot cu ajutorul formulei de definiție rezultă:

$$Z\{f(t-nT)\} = z^{-n}Z\{f(t)\}$$

$$Z\{f(t-nT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT-nT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT-nT)z^{-(k-n)}z^{-n} =$$

$$= z^{-n}\sum_{m=-n}^{\infty} f(mT)z^{-m} = z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} f(mT)z^{-m} = z^{-n}Z\{f(t)\}$$

făcând substituția k-n = m si ținând cont că f(t) = 0 pentru t < 0.

Într-un mod asemănător se procedează în cazul calculului transformatei z a unei funcții anticipate.

$$Z\{f(t+nT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT+nT)z^{-k} = z^{n}\sum_{k=0}^{\infty} f(kT+nT)z^{-(k+n)}z^{n} =$$

$$k+n = m \ (k=0, m=n)$$

$$= z^{n}\sum_{m=n}^{\infty} f(mT)z^{-m} = z^{n}\left(F(z) - \sum_{k=0}^{\infty} f(mT)z^{-m}\right).$$

4). Teorema valorii inițiale.

$$\lim_{k\to 0} f(kT) = \lim_{z\to\infty} F(z) \tag{4.8}$$

Teorema stabilește că valoarea funcției esantionate f(kT) în vecinătatea lui 0 este determinată de comportarea lui F(z) când z tinde la ∞.

Prin definiție, transformata z a funcției f(t) este

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \ldots + f(kT)z^{-k} + \ldots$$

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = f(0) = \lim_{k\to 0} f(kT) = \lim_{t\to 0} f(t).$$

5). Teorema valorii finale.

Dacă f(t) are o transformată z și dacă F(z) nu are poli pe cercul unitar sau în afara acestuia în planul z, atunci

$$\lim_{k\to\infty} f(kT) = \lim_{z\to 1} F(z)(1-z^{-1}) \tag{4.9}$$

Demonstrația se poate face considerând două sume finite consecutive

$$\sum_{k=0}^{n} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + ... + f(nT)z^{-n} \;:$$

$$\sum_{k=0}^{n} f((k+1)T)z^{-k} = f(0)z^{-1} + f(T)z^{-2} + ... + f((n-1)T)z^{-n}.$$

Se presupune că f(t) este definită numai pentru $t > 0$, astfel încât termenul f(-T) ce apare în ultima relație este nul.

$$\lim_{n\to\infty} f(nT) = \lim_{n\to\infty}\lim_{z\to 1}\left[\sum_{k=0}^{n} f(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n} f((k-1)T)z^{-k}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} f(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n} f((k-1)T)z^{-k}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} f((k-1)T)z^{-k}\right] = \lim_{z\to 1}\left[F(z) - z^{-1}F(z)\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})F(z).$$

6). Teorema derivatei parțiale.

Fiind notată cu F(z,a) transformata z a funcției f(t,a), unde a este o variabilă independentă sau o constantă, transformata z a derivatei parțiale a lui f(t,a) în raport cu a este dată de

$$Z\left\{\frac{\partial}{\partial a} f(t,a)\right\} = \frac{\partial}{\partial a} F(z,a). \qquad (4.10)$$

Demonstrația este imediată și se obține tot cu ajutorul formulei de definiție

$$Z\left\{\frac{\partial}{\partial a} f(t,a)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} f(kT,a)z^{-k} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(kT,a)z^{-k}\right) = \frac{\partial}{\partial a} F(z,a).$$

7). Teorema deplasării în complex.

Aceasta teoremă stabilește că dacă f(t) are transformata z F(z), atunci

$$Z\left\{e^{\mp at} f(t)\right\} = F(ze^{\pm aT}) \qquad (4.11)$$

Prin definiție

$$Z\left\{e^{\mp at} f(t)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{\mp aTk} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\left(e^{\pm aT} z\right)^{-k}$$

$$z_1 = e^{\pm aT} z \Rightarrow Z\left\{e^{\mp at} f(t)\right\} = F(z_1) = F(ze^{\pm aT}).$$

8). Produsul de convoluție în real.

$$F_1(z)F_2(z) = Z\left\{\sum_{k=0}^{\infty} f_1(nT)f_2(kT-nT)\right\} \qquad (4.12)$$

Pentru a demonstra aceasta pornim tot de la relația de definiție a transformatei z.

$$Z\left\{\sum_{n=0}^{k} f_1(nT)f_2(kT-nT)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} f_1(nT)f_2(kT-nT)z^{-k}$$

Făcând substituția k - n = m sau k = m + n rezultă

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} f_1(nT)f_2(kT-nT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT)f_2(kT-nT)z^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{\infty} f_1(nT)z^{-n}f_2(mT)z^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(nT)z^{-n}\sum_{n=-m}^{\infty} f_2(mT)z^{-m} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_1(nT)z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} f_2(mT)z^{-m} = F_1(z)F_2(z) \text{ q.e.d.}$$

Exemple de aplicare a proprietăților transformatei z.

1) Calculul transformatei z a funcției f(t)=sin ωt.

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}, \quad Z\{f(t)\} = Z\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right\}.$$

Aplicând primele două proprietăți ale transformatei z rezultă:

$$Z\{f(t)\} = \frac{1}{2j}Z\{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\} = \frac{1}{2j}Z\{e^{j\omega t}\} - \frac{1}{2j}Z\{e^{-j\omega t}\} =$$

$$= \frac{1}{2j}\frac{z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{1}{2j}\frac{z}{z-e^{-j\omega T}} = \frac{z\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega T}}{2j}\right)}{z^2 - z\left(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}\right) + 1} =$$

$$= \frac{z\sin\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}.$$

2) Să se calculeze transformata z a funcției $f(t)=te^{-at}$.

Se poate folosi faptul că $\frac{\partial}{\partial a}e^{-at} = -te^{-at}$ și teorema derivatei parțiale.

$$Z\{te^{-at}\} = -Z\left\{\frac{\partial}{\partial a}e^{-at}\right\} = -\frac{\partial}{\partial a}Z\{e^{-at}\} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial a}\frac{z}{z-e^{-at}} = \frac{Tze^{-aT}}{\left(z-e^{-at}\right)^2}.$$

O altă posibilitate este de a folosi teorema deplasării în complex.

$$Z\{te^{-at}\} = Z\{t\}\Big|_{z=ze^{+aT}} = \frac{Tz}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=ze^{aT}} =$$

$$= \frac{Tze^{aT}}{(ze^{aT}-1)^2} = \frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}.$$

O altă posibilitate de a obține modelul discret al unei funcții continue constă în discretizarea funcției continue printr-o procedură aproximativă cum ar fi: metoda dreptunghiului, metoda trapezului, proceduri ce permit aproximarea integralei funcției respective prin intermediul unor relații de tipul sumei sau diferenței.

4.2 Spectrul de frecvență al semnalului eșantionat
Teorema lui Shannon

Din modelul matematic al eșantionării ideale a fost dedusă relația ce definește forma semnalului la ieșirea acestuia:

$$X^*(t) = X(t)\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(kT)\delta(t-kT). \qquad (4.13)$$

Spectrul de frecvență al semnalului eșantionat se determină cu ajutorul transformatei Fourier:

$$X^*(j\omega) = F\{x^*(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)e^{-j\omega t}dt = \sum_{k=0}^{\infty} X(kT)e^{-j\omega kT}. \qquad (4.14)$$

Acest spectru de frecvență se bucură de proprietatea de multiplicitate în frecvență cu pulsația ω_0 ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$), ceea ce permite împărțirea planului complex z în benzi de lățime ω_0.

Deoarece

$$\sum_{k=0}^{\infty} X(kT)e^{-j\omega kT} = \sum_{k=0}^{\infty} X(kT)e^{-j(\omega+n\omega_0)kT}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} X(kT)e^{-j(\omega+n\omega_0)kT} = \sum_{k=0}^{\infty} X(kT)e^{-j\omega kT}e^{-jn\frac{2\pi}{T}kT} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} X(kT)e^{-j\omega kT}\underbrace{e^{-jnkT\cdot 2\pi}}_{1} = \sum_{k=0}^{\infty} X(kT)e^{-j\omega kT}$$

ceea ce înseamnă $X^*(j\omega) = X^*(j(\omega + n\omega_0))$, pentru n=±1, ±2,.... Dacă $X^*(j\omega)$ este cunoscut pentru $-\omega_0/2 \le \omega \le \omega_0/2$, $X^*(j\omega)$, este cunoscut complet pentru toți ω.

Dacă semnalul continuu x(t) este eşantionat cu o perioadă mică T=Δt. transformata Laplace a semnalului continuu poate fi aproximată:

$$L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(kT)e^{-kTs}dt \approx \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta t)e^{-k\Delta Ts}\Delta t.$$

Ţinând cont şi de transformata Laplace a semnalului discretizat la $(T = \Delta t)$ $L\{x^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$ rezultă:

$$TX^*(s) \approx X(s)$$

ceea ce conduce la $TX^*(j\omega) = X(j\omega)$.

Să presupunem că frecvența maximă din spectrul de frecvență al semnalului continuu este ω_{max}, adică:

$$X(j\omega) \neq 0, \quad -\omega_{max} \le \omega \le \omega_{max}$$
$$X(j\omega) = 0, \quad \omega < -\omega_{max} \text{ si } \omega > \omega_{max}$$

ca în figura 4.1.

Pentru T suficient de mic transformata Fourier a semnalului discretizat $X^*(t)$ va conține un spectru de bază $T_0X^*(s) \approx X(j\omega), -\omega_{max} < \omega < \omega_{max}$, repetat periodic în frecvență cu pulsația ω_0 (spectru complementar) (fig.4.1.b). În comparație cu semnalul continuu (fig.4.1.a) componente adiționale de frecvență ridicată apar în semnalul eşantionat. Acest fapt a fost discutat anterior.

Dacă se doreste reconstrucția semnalului continuu din semnalul eşantionat, acesta se poate face folosind un filtru trece-jos ideal (fig.4.1.c)

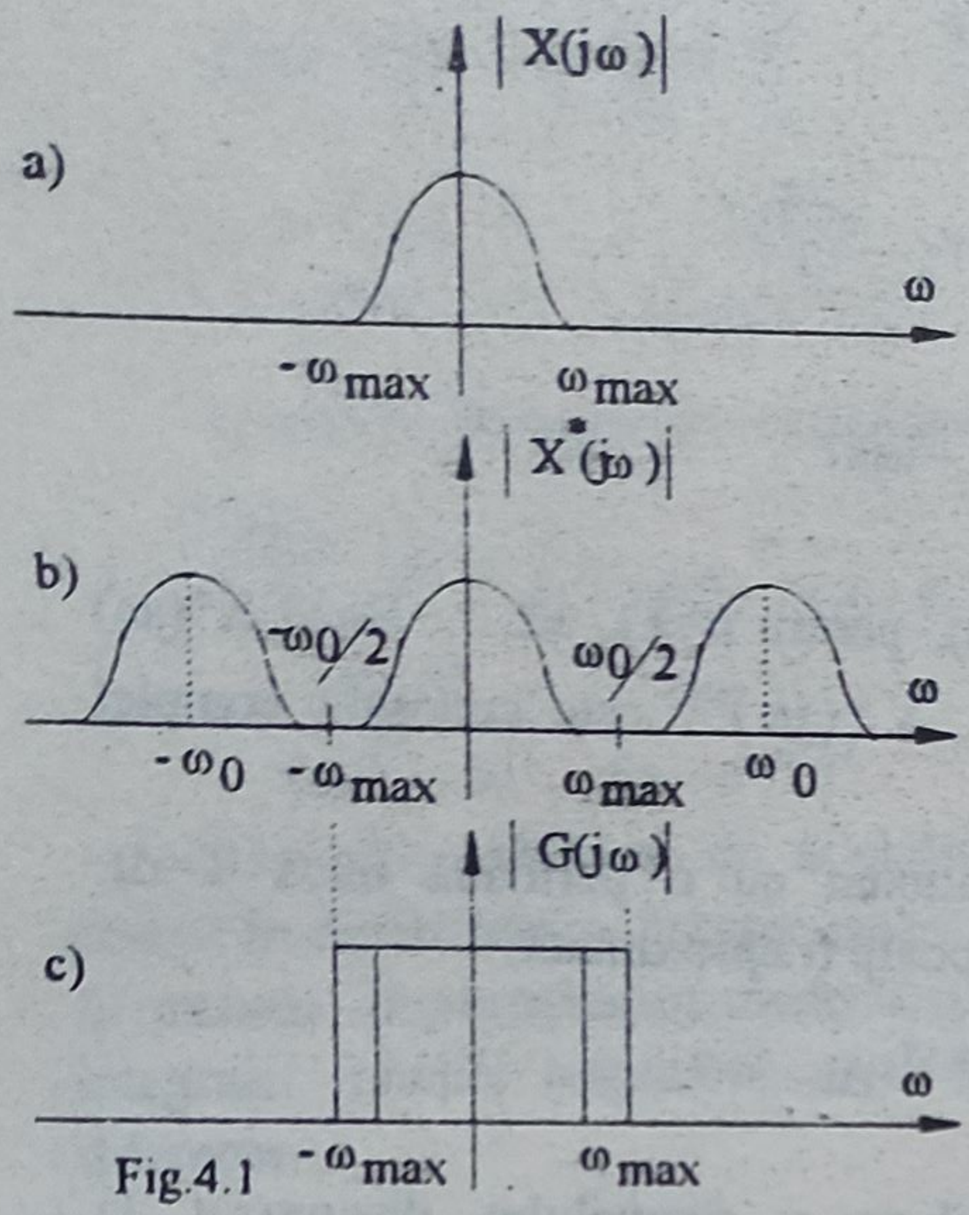


Fig.4.1

$|G(j\omega)| = 1 \quad -\omega_{max} \le \omega \le \omega_{max}$

$|G(j\omega)| = 0 \quad \omega < -\omega_{max}, \quad \omega > \omega_{max}$.

Spectrul semnalului continuu poate fi extras integral doar dacă $\omega_0/2 = \pi/T > \omega_{max}$.

Dacă perioada de eşantionare este prea mare (sau frecvenţa de eşantionare este prea mică) $\omega_0/2 < \omega_{max}$ o interpătrundere a spectrului fundamental şi a spectrelor complementare va face ca o filtrare fără erori a spectrului fundamental să nu fie posibilă.

Deci, pentru a reconstitui semnalul continuu de bandă limitată, având frecvenţa maximă ω_{max} din semnal eşantionat, pulsaţia de eşantionare ω_0 trebuie aleasă astfel încât: $\omega_0 > 2\omega_{max}$ sau $T_0 < \pi/\omega_{max}$.

Teorema lui Shannon. Oscilaţia de frecvenţă maximă ω_{max}, de perioadă $T_p = 2\pi/\omega_{max}$ trebuie eşantionată de cel puţin 2 ori pe perioadă.

Trebuie menţionat că semnale continue de bandă limitată nu apar în realitate în comunicaţii sau sisteme automate. Totuşi, în sistemele discrete, frecvenţa Shannon, numită şi frecvenţă Nyquist $\omega_{Sh} = \omega_0./2=\pi/T$ joacă un rol important, cel puţin ca frecvenţă de referinţă.

4.3. Transformata inversă z

Răspunsul în domeniul timpului trebuie obţinut din expresiile transformatei z, analog transformării Laplace. Unul din dezavantajele transformatei z este că aceasta conţine informaţia referitoare la funcţia de timp corespunzătoare numai momentelor de eşantionare, adică X(z) corespunde numai lui X*(t). Dacă pulsaţia de eşantionare este cel puţin dublă faţă de pulsaţia cea mai înaltă a semnalului continuu x(t), poate fi reconstituit x(t) din X*(t) cu un filtru trece- jos ideal. Atunci X(z) poartă virtual toată informaţia cuprinsă în transformata Laplace X(s). Totuşi, dacă nu se cunoaşte nimic despre caracteristicile lui x(t),

transformata inversă z nu este în general, unică deoarece funcţia discretă de timp $x^*(t)$ obţinută din X(z) poate reprezenta orice funcţie continuă X(t) care are aceleaşi valori ca şi $X^*(t)$ în momentele de eşantionare. Au fost elaborate unele metode pentru evaluarea semnalelor între momentele de eşantionare. Acestea sunt metoda transformatei z divizate şi metoda transformatei z modificate.

Transformata z inversă poate fi calculată prin următoarele metode:

1) Metoda dezvoltării în fracţii simple.

Transformata z, X(z) este pusă sub forma unei sume de funcţii prin dezvoltarea în fracţii simple. Se utilizează apoi tabelele cu transformate z pentru a determina funcţiile de timp corespunzătoare.

2) Metoda seriilor de puteri.

Transformata z, X(z), este dezvoltată într-o serie de puteri după puterile lui z^{-1}. Coeficientul termenului z^{-n} corespunde cu valoarea funcţiei de timp x(t) în momentul de eşantionare nT.

3) Formula de inversiune

Funcţia discretă de timp $x^*(t)$ poate fi obţinută din X(z) printr-o integrală de inversiune

$$X(nT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1}dz \qquad (4.15)$$

unde Γ este un cerc de rază $z = e^{cT}$ cu centrul în originea planului z, iar c este astfel ales încât toţi polii lui X(z) sa fie conţinuţi în interiorul conturului circular.

Exemple

Să se calculeze transformata inversă z a semnalului:

$$X(z) = \frac{\left(1-e^{-at}\right)z}{(z-1)(z-e^{-at})},$$

în care a este o constantă şi T perioada de eşantionare în secunde, prin toate cele 3 metode enunţate anterior.

1) S-a observat că transformata z a funcţiilor elementare este de forma $\frac{z(\quad)}{(\quad)}$. Este deci de dorit a se dezvolta în fracţii simple mai întâi X(z)/z şi apoi să se multiplice termenii dezvoltaţi prin z.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-e^{-aT}}; X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \Rightarrow X(nT) = 1-e^{-anT}$$

(folosind tabele de transformate z).

Funcţia eşantionată este dată de $X^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(1-e^{-akT})\delta(t-kT)$.

2) Împărţind numărătorul la numitor se obţine:

$$X(z)=(1-e^{-aT})z^{-1}+(1-e^{-2aT})z^{-2}+(1-e^{-3aT})z^{-3}+.....$$

$$\Rightarrow X^*(t)=(1-e^{-aT})\delta(t-T)+(1-e^{-2aT})\delta(t-2T)+(1-e^{-3aT})\delta(t-3T)+....$$

$$X^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(1-e^{-akT})\delta(t-kT).$$

3) Folosind formula de inversiune.

$$X(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}z^{n-1}dz.$$

Integrala pe contur poate fi calculată folosind teorema reziduurilor

$$X(nT)=\sum \mathrm{Re}\,z\left[X(z)z^{n-1},\rho\right].$$

Reziduurile funcţiei de sub integrală se calculează în punctele singulare izolate ale acesteia (poli sau puncte singulare esenţiale). În cazul de faţă suma reziduurilor cuprinde 2 reziduuri, în cei 2 poli ai funcţiei de sub integrală, z=1, $z=e^{-aT}$.

$$\mathrm{Re}\,z\left[X(z)z^{n-1},1\right]=\left.\frac{z^n(1-e^{-aT})}{z-e^{-aT}}\right|_{z=1}=1$$

$$\mathrm{Re}\,z\left[X(z)z^{n-1},e^{-aT}\right]=\left.\frac{z^n(1-e^{-aT})}{z-1}\right|_{z=e^{-aT}}=-e^{-aTn}$$

$$X(nT)=1-e^{-aTn}.$$

Rezultă că se obţine aceeaşi funcţie X*(nT) ca şi prin celelalte două metode.

4.4 Limitările transformatei z

1) Transformata z se bazează pe supoziţia că semnalul eşantionat este aproximat printr-un tren de funcţii impuls a căror arii sunt egale cu semnalul de intrare în momentele de eşantionare. Această supoziţie este valabilă dacă durata eşantionării este mult mai mică decât constantele de timp ale sistemului.

2) Transformata z a semnalului de ieşire a unui sistem liniar specifică numai valorile funcţiei de timp a ieşirii numai în momentele de eşantionare. Prin urmare,

transformata z inversă, descrie funcția de timp a ieşirii numai în momentele t = nT.

3) La analiza unui sistem cu eşantionare prin metoda transformatei z, funcția de transfer a sistemului trebuie să aibă cel puțin 2 poli mai mult decât zerouri (exces poli-zerouri 2) sau echivalent, funcția pondere trebuie să aibă salt în origine.

Exemplu

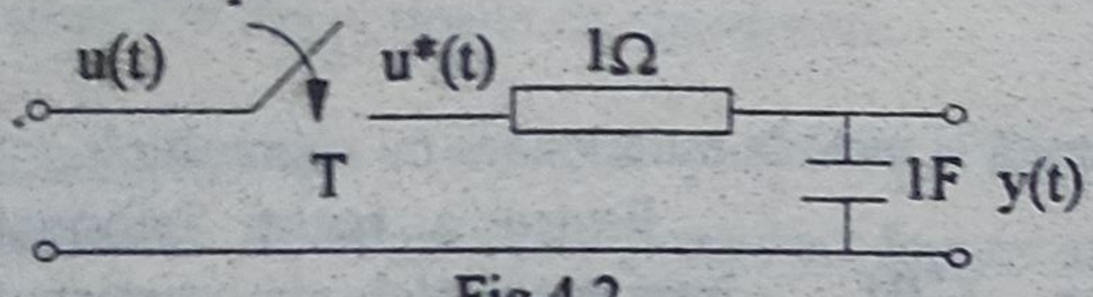


Fig.4.2.

Sistemul în acest caz este un filtru RC având funcția de transfer G(s) = 1 / (s+1), iar transformata z corespunzătoare este G(z)= z / (z-e^{-aT}). T = 1s.

Dacă u(t) = σ(t) (treaptă unitară), transformata z a semnalului de ieşire este:

$$Y(z)=\frac{z}{z-1}\frac{z}{z-e^{-at}}=\frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-aT})}=\frac{z^2}{(z-1)(z-0{,}368)}.$$

Valoarea lui y(t) în momentele de eşantionare este dată de dezvoltarea în serie a lui $Y(z)=1+1{,}368z^{-1}+1{,}5z^{-2}+1{,}55z^{-3}+1{,}56z^{-4}+.....$

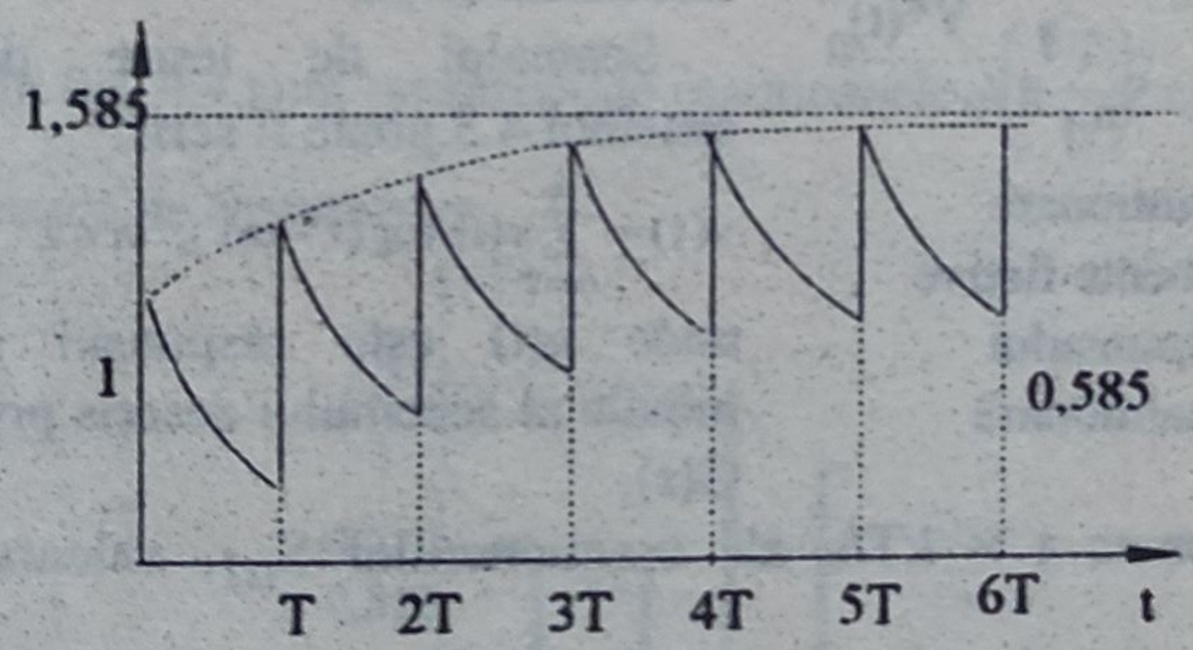


Fig.4.3

Semnalul u*(t) fiind un tren de funcții impuls, se poate arăta uşor prin transformata Laplace că răspunsul real al sistemului este de forma reprezentată în fig.4.3. Se observă că metoda transformatei z furnizează rezultatul având salt în origine. Acest lucru se datorează faptului că metoda se bazează pe ipoteza că semnalul de ieşire al elementului de eşantionare este un tren de funcții impuls. În realitate ieşirea unui sistem continuu este un semnal continuu, indiferent de tipul semnalului cu care este excitat.

Deoarece G(s) considerat prezintă un pol şi zero zerouri, deci un singur pol în exces, funcția pondere prezintă un salt în origine, justificat numai teoretic prin faptul că funcția impuls se consideră a fi de amplitudine infinită. Dacă la intrarea

G(s) se aplică impulsuri reale, de lățime și amplitudine finite, saltul în origine nu apare.

În vederea estimării răspunsului sistemelor discrete între momentele de eșantionare s-au elaborat mai multe metode, între care mai utilizate sunt metoda eșantionării divizate și metoda transformatei z modificate.

4.5 Răspunsul sistemelor discrete între momentele de eșantionare

a) Metoda eșantionării divizate

Uneori aceasta metodă mai este numită si metoda eșantionarii cu submultipli.

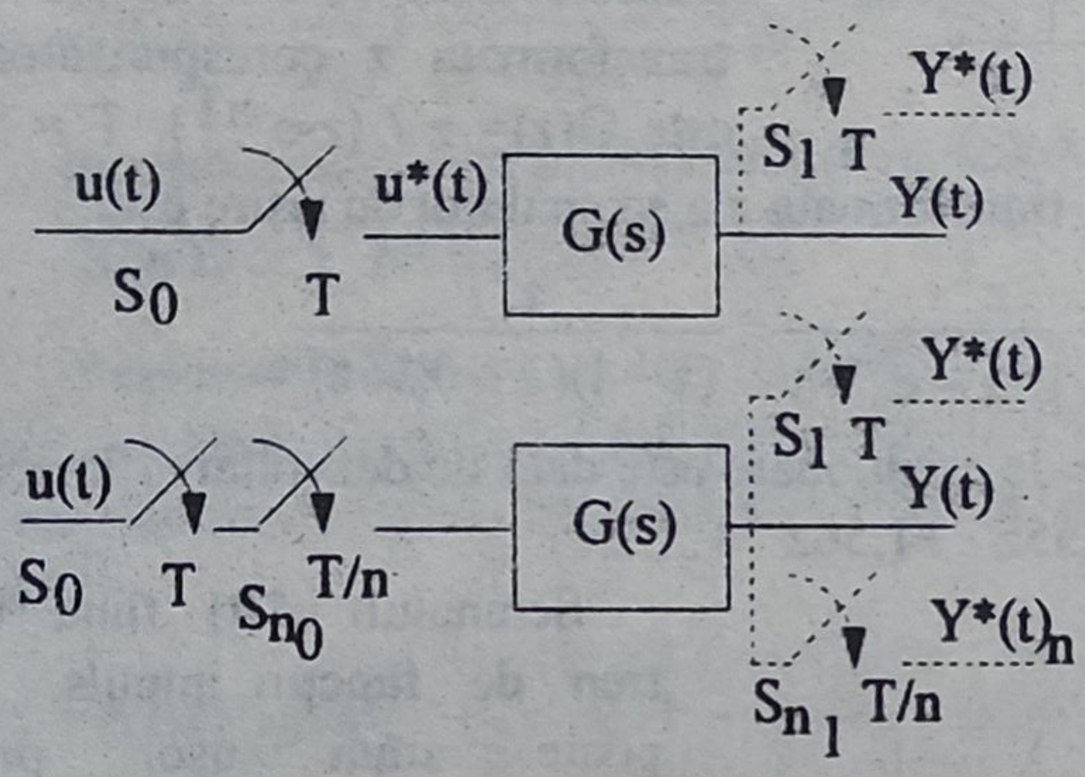


Fig.4.3 Sistem de eșantionare în circuit dechis cu elemente fictive pentru evaluarea răspunsului între momentele de eșantionare

Pentru a regăsi informația între momentele de eșantionare, elementele de eșantionare fictive S_{n0} și S_{n1} cu perioada de eșantionare T/n sunt introduse ca în fig.4.3. Aceste 2 eșantionoare fictive nu afectează în nici un fel comportarea sistemului inițial.

Semnalul de ieșire din sistemul 4.3 poate fi scris:

$$y(t)=\sum_{m=0}^{\infty}u(mT)g(t-mT),\ m\in Z$$

unde g(t) este răspunsul la impuls al sistemului descris prin G(s).

La momentele de eșantionare t = kT/n ale eșantionorului S_{n1}, valoarea semnalului este:

$$y\left(\frac{kT}{n}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}u(mT)g\left(\frac{kT}{n}-mT\right).$$

Semnalul la ieșirea eșantionorului fictiv S_{n1} poate fi scris astfel:

$$y^*(t)_n=\sum_{k=0}^{\infty}u(\frac{kT}{n})\delta\left(t-\frac{kT}{n}\right).$$

Aplicând transformata z ambilor membri ai ultimei relații rezultă:

$$Y(z)_n = \sum_{k=0}^{\infty} u\left(\frac{kT}{n}\right)\delta\left(t-\frac{kT}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c\left(\frac{kT}{n}\right)z^{-k/n} = Y(z)\Big|_{\substack{z=z^{1/n}\\ T=T/n}} \qquad (4.16)$$

Prin urmare transformata z a acestui semnal este egală cu transformata z a semnalului y*(t) în care se fac substituțiile $z=z^{1/n}$ si T = T/n Rezultă că răspunsul între momentele de eşantionare poate fi evaluat folosind transformata z ordinară.

Cu ajutorul relației (4.16) se pot evalua eşantioane ale răspunsului y(t) la fracțiuni T/n din perioada de eşantionare.

Exemplu

Referindu-ne la exemplul precedent, în care sistemul era format dintr-un filtru trece-jos, şi considerând n=3, rezultă:

$$Y_3(z) = G_3(z)U(z) = \left|\frac{z}{z-e^{-T}}\right|_{\substack{T\to T/3\\ z\to z^{1/3}}} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^{1/3}}{z^{1/3}-e^{-1/3}} \cdot \frac{z}{z-1}.$$

Făcând substituțiile $z^{1/3} = z'$ si $z = z'^3$ se obține:

$$Y_3(z) = \frac{z'^4}{z'^4 - e^{-1/3}z'^3 - z' + e^{-1/3}} = 1 + 0{,}717z'^{-1} + 0{,}514z'^{-2} + 1{,}368z'^{-3} + 0{,}98z'^{-4} + \ldots$$

În fig. 4.4 sunt reprezentate eşantioanele $y\left(k\frac{T}{3}\right)$, corcspunzătoare treimilor din perioada de eşantionare.

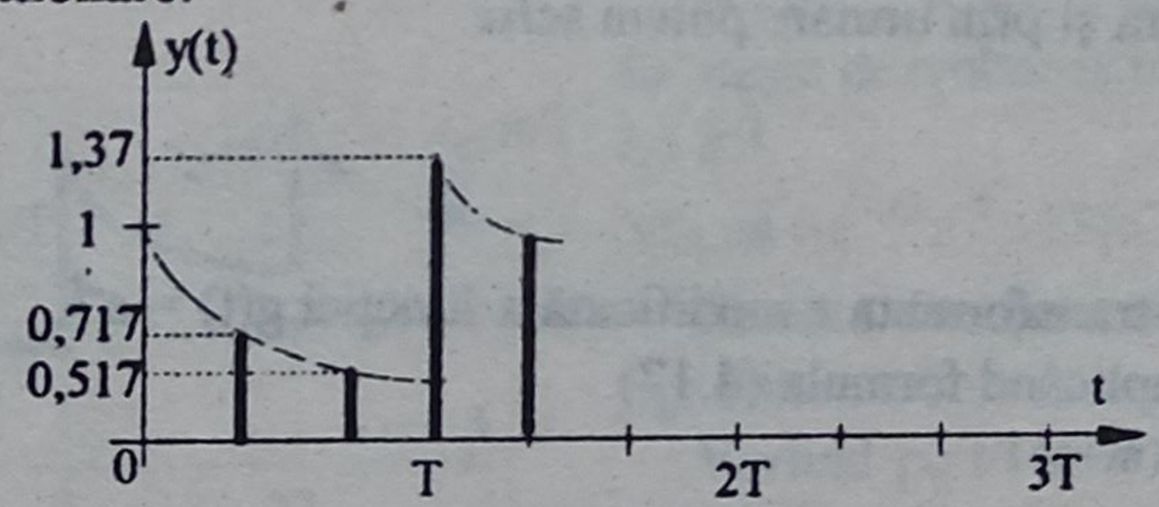


Fig.4.4

b) Metoda transformatei z modificate

Aceasta se obține cu ajutorul teoremei deplasării în real.

$$Y^*(t-kT) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT-kT)\delta(t-nT).$$

Considerăm k fiind de forma $k = \lambda + \Delta$ unde λ = întreg şi $\Delta < 1$.

Substituind rezultă:

$$Y^*(t-kT) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT-\lambda T-\Delta T)\delta(t-nT).$$

Aplicând transformata z ambilor membri ai ecuației

$$Z\{Y(t-kT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT-\lambda T-\Delta T)z^{-n}$$

$$Z\{Y(t-k)\} = z^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} y(nT-\Delta T)z^{-n}. \quad \text{Pentru } \lambda = 0 \qquad (4.16)$$

$$\Rightarrow Z\{Y(t-\Delta T)\} = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT-\Delta T)z^{-n}$$

care sc defineşte ca transformata z întârziată a lui y(t) şi se notează

$Y(z,\Delta)=Z\{y(t-\Delta T\}$.

Atribuind valori adecvate lui Δ putem obține virtual întreaga informație din y(t) prin $Y(z,\Delta)$, luând transformata z modificată inversă.

Este posibil să se introducă notația $m = 1-\Delta$ şi în acest caz

$$Y(z,\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT-T+mT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} y((n+m)T-T)z^{-n} \qquad (4.17)$$

$$= z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} y((n+m)T)z^{-n} = Y(z,m).$$

De menționat că atunci când $m = 1(\Delta = 0)$, transformata z modificată devine transformata z ordinară şi prin urmare putem scrie:

$Y(z,1) = Y(z)$.

Exemple

1) Să se calculeze transformata z modificată a funcției $g(t) = e^{-t}$.

Soluția se obține aplicând formula (4.17).

$$g((n+m)T) = e^{-(m+n)T}$$

$$G(z,m) = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(m+n)T}z^{-n}.$$

Dezvoltând ultima relație

$$G(z,m) = z^{-1}\left(e^{-mT} + z^{-1}e^{-(m+1)T} + z^{-2}e^{-(m+2)T} + \ldots\right)$$

ceea ce poate fi scris într-o formă restrânsă

$$G(z,m)=\frac{z^{-1}e^{-mT}}{1-e^{-T}z^{-1}}=\frac{e^{-mT}}{z-e^{-T}}.$$

Împărțind numărătorul lui G(z,m) la numitorul ($z-e^{-T}$) se obține:

$$G(z,m)=e^{-mT}z^{-1}+e^{-(m+1)T}z^{-2}+e^{-(m+2)T}z^{-3}+\ldots$$

Funcția de timp g(t) pe parcursul primei perioade de eşantionare este dată de coeficientul e^{-mT} al lui z^{-1} când m = 0 ($\Delta = 1$) se obține g(t)pentru $t = 0^+$; când m=1 ($\Delta = 0$) se obține $g(T^-)$. Rezultă că g(t) = =1, $g(T^-)=e^{-T}\cong 0{,}37$, dacă T=1s. Pentru al doilea interval, coeficientul lui z^{-2} va furniza informațiile: la m=0, $g(T^+)=e^{-T}\cong 0{,}37$; la m=1 $g(2T^-)=e^{-2T}\cong 0{,}15$ iar la $0<m<1$, $g(t)=e^{-T}e^{mT}$. În fig. 4.5 este reprezentată funcția g(t), obținută prin transformata z modificată inversă.

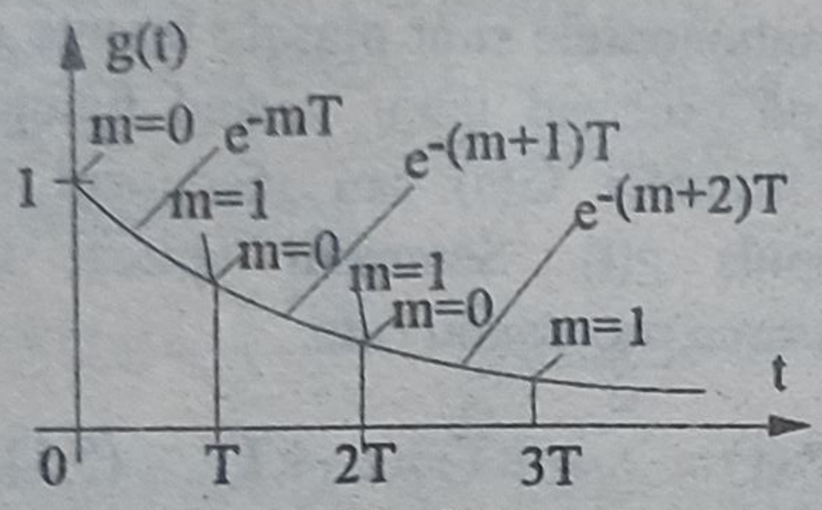


Fig.4.5

2) Revenind la exemplul circuitului RC analizat prin metoda transformatei z, cu transformata z modificată se obține:

$$Y(z,m)=U(z)G(z,m)=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{e^{-mT}}{z-e^{-T}}$$

$$Y(z,m)=\frac{ze^{-mT}}{z^2-(1+e^{-T})z+e^{-T}}=\frac{ze^{-mT}}{z^2-1{,}37z+0{,}37}.$$

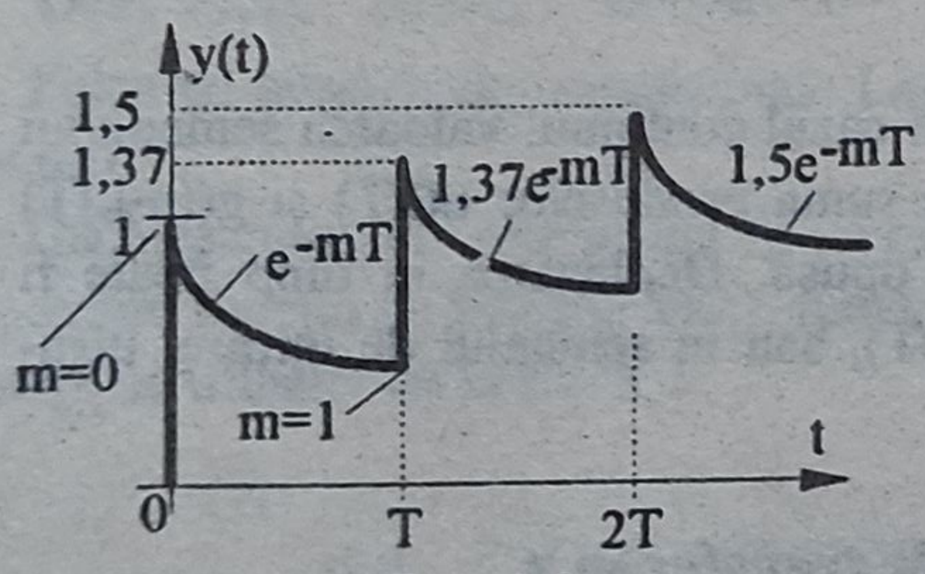


Fig. 4.6

Pentru transformarea inversă se foloseşte dezvoltarea în seria de puteri ale lui z^{-1}:

$$Y(z,m)=e^{-mT}z^{-1}+1{,}37e^{-mT}z^{-2}+1{,}5e^{-mT}z^{-3}+\ldots$$

Rezultă funcția continuă de timp din fig. 4.6.

Variind pe m între 0 si 1 se obține în întregime funcția continuă de timp, înlăturându-se astfel unul din dezavantajele majore ale metodei transformatei z.

V. Funcții de transfer în z

5.1. Suma de convoluție

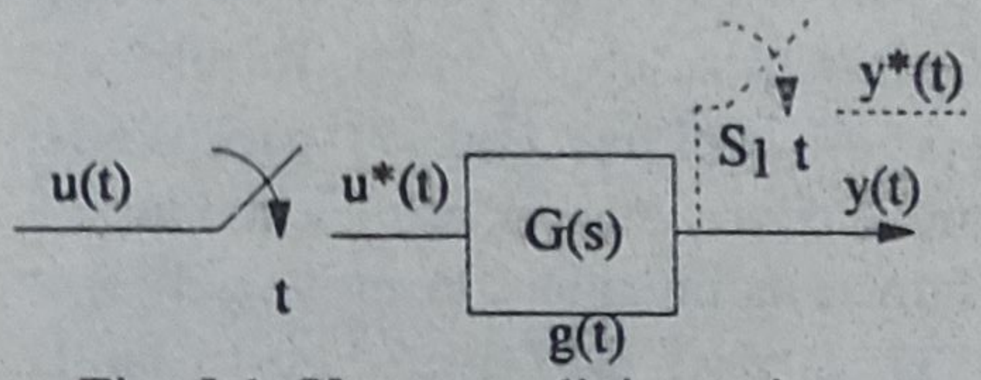


Fig. 5.1. Un proces liniar cu intrarea şi ieşirea eşantionate

Aşa cum se arată în fig.5.1, eşantionoarele sunt plasate înainte şi după procesul liniar, având funcția de transfer G(s) sau răspunsul la impuls g(t). Semnalul aplicat la intrarea procesului este:

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta(t-kT) \qquad (5.1)$$

Semnalul la ieşirea procesului se obține cu suma de convoluție dintre răspunsul la impuls şi semnalul aplicat la intrarea procesului

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)g(t-kT). \qquad (5.2)$$

Dacă ieşirea şi intrarea procesului sunt eşantionate sincron, rezultă pentru t = nT:

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\delta((n-k)T) = \sum_{m=0}^{\infty} u((n-m)T)g(mT). \qquad (5.3)$$

Ca şi în cazul integralei de convoluție din cazul continuu, valoarea semnalului la ieşire în momentul nT este obținută prin suma produselor u(kT) şi g((n-k)T) care este deplasată în timp nT în direcție opusă. Deplasarea în timp poate fi făcută în funcția răspuns la impuls, g((n-k)T), sau în semnalul de intrare, u((n-m)T) ceea ce se poate vedea şi din 5.3.

5.2 Răspunsul la impuls şi funcția de transfer în z

Introducând 5.3 în transformata Laplace a ieşirii discrete y(nT) rezultă:

$$y^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u(kT)g((n-k)T)e^{-nTs} \qquad (5.4)$$

şi substituind q = n- k(n=q+k)

$$Y^*(s) = \sum_{q=-k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)g(qT)e^{-qTs}e^{-kTs} =$$

$$= \underbrace{\sum_{q=0}^{\infty} g(qT)e^{-qTs}}_{G^*(s)} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u(kT)e^{-kTs}}_{U^*(s)} = G^*(s)u^*(s) \qquad (5.5)$$

considerând $g(qT)=0$ pentru $q<0$.

Rezultă că transformata Laplace, $u^*(0)$ a semnalului la intrare este exprimată ca un factor separat şi, similar cu cazul sistemelor continue, funcţia de transfer este definită astfel:

$$G^*(s) = \frac{Y^*(s)}{U^*(s)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT)e^{-qTs}. \qquad (5.6)$$

Făcând substituţia $z = e^{Ts}$ se obţine *funcţia de transfer în z*:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT)z^{-q} = Z\{g(t)\}. \qquad (5.7)$$

Deci transformata z este raportul dintre transformata z a semnalului de intrare şi de ieşire şi egală cu transformata z a răspunsului la impuls.

Funcţia de transfer în z se poate obţine fără a calcula funcţia g(t) a sistemului Conform celor prezentate, ar trebui parcurşi următorii paşi:

$$G(s) \rightarrow g(t) \rightarrow g(kT) \rightarrow G(z) \quad \text{sau}$$
$$G(z) = Z\{L^{-1}\{G(s)\}\}. \qquad (5.8)$$

Folosind tabelele de transformate Laplace şi z se poate determina direct G(s) $\rightarrow$G(z).

Dacă eşantionorul este urmat de un extrapolator (uzual extrapolatorul de ordin 0), având funcţia de transfer H(s), funcţia de transfer devine produsul celor două funcţii de transfer ca în fig. 5.2.

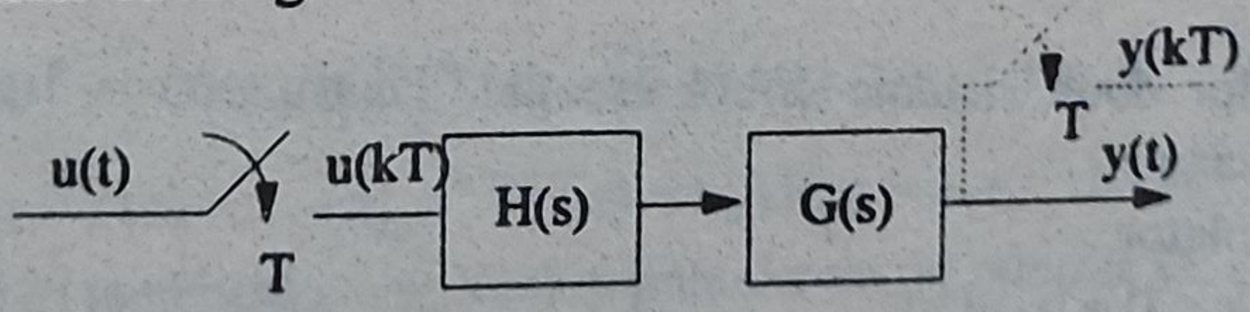


Fig.5.2 Proces liniar eşantionat cu extrapolator

Pentru extrapolatorul de ordin 0:

$$HG(z) = Z\{L^{-1}\{H(s)G(s)\}\} = Z\{L^{-1}\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\}\} = \tag{5.9}$$

$$= Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\} - Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}e^{-sT}\right\}\right\} = (1-z^{-1})Z\left\{L^{-1}\{G(s)/s\}\right\}.$$

În cazul folosirii unui extrapolator de ordin 1 rezultă:

$$HG(s) = (1-z^{-1})^2 Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{1+Ts}{T}\frac{G(s)}{s^2}\right\}\right\}. \tag{5.10}$$

Exemplul 1.

Să considerăm un element PT_1 fără extrapolator.

$$G(s) = \frac{k}{1+Ts} = \frac{k'}{a+s}, \quad a = 1/T, \quad k' = k/T$$

$$G(z) = \frac{b_0}{1+a_1 z^{-1}}, \quad \text{unde} \quad b_0 = k', \quad a_1 = -e^{-aT}.$$

Pentru $k = 1$, $T = 7{,}5s$ şi $T = 4s$ rezultă $b_0 = 0{,}1333$ şi $a_1 = -0{,}5866$.

Să considerăm acum acelaşi sistem, dar cu un extrapolator de ordin 0 ($H(s) = (1-e^{-sT})/s$

$$HG(z) = (1-z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{k'}{s(a+s)}\right\}\right\} = \frac{z-1}{z}\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}\frac{k'}{a} =$$

$$= \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}\frac{k'}{a} = \frac{b'z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}}.$$

Pentru aceleaşi valori numerice rezultă $b_1 = 0{,}4134$ şi $a_1 = e^{-aT} = -0{,}5866$.

Prin compararea celor două funcţii de transfer se observă că extrapolatorul introduce în numărător o modificare (întârziere) în timp ce numitorul rămâne neschimbat

Răspunsul celor două sisteme diferă esenţial. Pentru $u(t) = 1(t)(\sigma(t))$ vom considera cele 2 cazuri:

I. Fără extrapolator.

$y(k) = -a_1 y(k-1) + b_0 u(k)$

$y(0) = 0{,}1333$, $y(2) = 0{,}2897$

$y(1) = 0{,}2666$, $y(3) = 0{,}3032$.

II. Cu extrapolator.

$y(0) = 0$ $y(2) = 0{,}6559$

$y(1) = 0{,}4134$ $y(3) = 0{,}7891$.

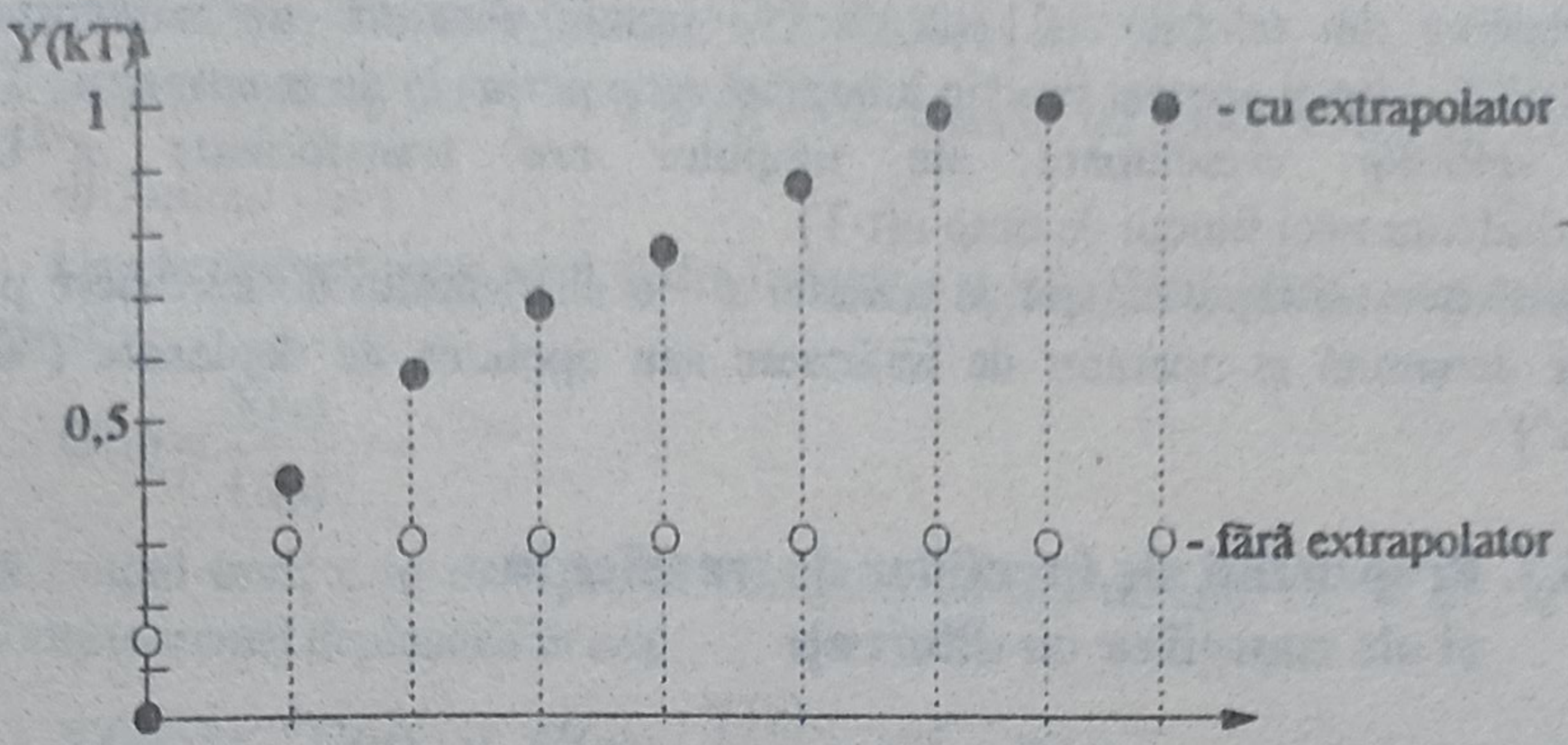


Fig.5.3 Răspunsul indicial al elementului PT_1 cu şi fără extrapolator de ordin 0

În fig.5.3 sunt prezentate ambele răspunsuri şi se evidenţiază faptul că trebuie conectat un extrapolator în faţa procesului dacă se doreşte ca modelul discret să aibă o comportare echivalentă cu cea a procesului continuu.

Dispunând de transformata z a unui sistem, acesta poate fi descris printr-o ecuaţie cu diferenţe şi reciproc. Trecerea de la funcţiile de transfer la ecuaţiile recursive se face pe baza proprietăţii transformatei z numită teorema deplasării în real. Conform acesteia:

$$Z\{u((k-1)T)\} = z^{-1}Z\{u(kT)\} \qquad Z\{y((k-1)T)\} = z^{-1}Z\{y(kT)\}$$
$$Z\{u((k-2)T)\} = z^{-2}Z\{u(kT)\} \qquad Z\{y((k-2)T)\} = z^{-2}Z\{y(kT)\} \qquad (5.11)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Considerând cazul general al unei funcţii de transfer în z

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_m z^{-m}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \qquad (5.12)$$

rezultă

$$\left(1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_m z^{-m}\right) Y(z) = \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}\right) U(z) \qquad (5.13)$$

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \ldots + a_m z^{-m} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \ldots + b_m z^{-m} U(z).$$

Izolând în membrul stâng Y(z) şi ţinând cont de relaţiile (5.11) rezultă:

$$Z\{y(kT)\} = -a_1 Z\{y((k-1)T)\} - \ldots\ldots - a_n Z\{y((k-m)T)\} +$$
$$b_0 Z\{u(kT)\} + b_1 Z\{u((k-1)T)\} + \ldots + b_m Z\{u((k-m)T)\} \Leftrightarrow \qquad (5.14)$$
$$y(kT) = -a_1 y((k-1)T) - \ldots\ldots - a_m y((k-m)T) + b_0 u(kT) +$$
$$+ b_1 u((k-1)T) + \ldots + b_m U((k-m)T).$$

Se observă din relaţiile 5.11 că dacă o funcţie discretă are transformata $U(z)=Z\{u(t)\}$, atunci aceeaşi funcţie întârziată cu o perioadă de eşantionare, T, în sensul valorilor crescătoare ale timpului are transformata $z^{-1}U(z)$ corespunzătoare unei funcţii de timp u(t-T).

Datorită acestui fapt, funcţia de transfer z^{-1} a elementului de întârziere pură mai este denumită şi operator de întârziere sau operator de deplasare ("shift operator")

5.3. Proprietăţi ale funcţiilor de transfer în z şi ale ecuaţiilor cu diferenţe

a) Proporţionalitatea

Pentru un element cu comportare proporţională, factorul de amplificare se poate obţine folosind teorema valorii finale:

$$k = \frac{y(k\to\infty)}{u(k\to\infty)} = \frac{\lim\limits_{z\to 1}(1-z^{-1})Y(z)}{\lim\limits_{z\to 1}(1-z^{-1})U(z)} = \lim_{z\to 1}\frac{Y(z)}{U(z)} = \lim_{z\to 1}G(z) = \tag{5.15}$$

$$= \frac{b_0+b_1+\ldots+b_m}{1+a_1+\ldots+a_m}.$$

b) Dacă $G(s) = 1/T_1 s \Rightarrow G(z) = Z\left\{L^{-1}\{1/T_1 s\}\right\} = \frac{Z}{T_1(z-1)} = \frac{1}{T_1(1-z^{-1})}$.

Rezulta că sistemele ce au o componentă integrală vor avea un pol $z = 1$.

c) Componenta derivativă

Cu perioada de eşantionare finită, o comportare perfect derivativă a unui element de transfer discret nu este de aşteptat. Să considerăm sistemul continuu:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{T_D s}{1+T_1 s} \tag{5.16}$$

Cu extrapolator de ordin 0, funcţia de transfer discretă rezultă:

$$HG(s) = \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{T_D s}{1+T_1 s}\right\}\right\} = \frac{b_0(z-1)}{z+a_1} = \frac{b_0(1-z^{-1})}{1+a_1 z^{-1}} \tag{5.17}$$

cu $a_1 = e^{-T_D/T_1}$ şi $b_0 = T_D/T_1$

Deci există un pol $z = -a_1$ si un zero la $z_{D1} = 1$. Aceasta implică ecuaţia diferenţială:

$$y(k)+a_1y(k-1)=b_0[u(k)-u(k-1)]=b_0\Delta u(k).$$

Pentru $T_1 \to 0 \Rightarrow a_1 \to 0$ şi $b_0 \to \infty$, ceea ce nu poate fi realizat fizic.

d) Timpul mort

Un element cu timp mort poate fi descris prin y(t)=u(t-Tm) sau prin funcţia de transfer:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=e^{-Tms}.$$

Dacă timpul mort este multiplu al perioadei de eşantionare $Tm = dT$, $d \in N$, conform teoremei deplasării în real:

$$Y(z)=z^{-d}U(z) \quad \text{şi} \quad G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=z^{-d}=D(z). \tag{5.18}$$

Pentru un sistem liniar precedat sau urmat de un timp mort rezultă:

$$\Delta G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=G(z)z^{-d}. \tag{5.19}$$

Deci, pentru sistemele discrete elementele cu timp mort au acelaşi tip de funcţie de transfer ca şi celelalte elemente dinamice. Din contră, pentru sistemele continue elementele cu timp mort pot fi arareori incluse.

e) Realizabilitatea

Un sistem discret este realizabil dacă principiul cauzalităţii este satisfăcut, adică dacă variabila de ieşire y(k) nu depinde de valori viitoare ale semnalului de intrare u(k+j), j = 1, 2,.... . Aceasta conduce la:

i) o ecuaţie diferenţială

$$a_0y(k)+a_1y(k-1)+\ldots+a_ny(k-n)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\ldots+b_mu(k-m) \tag{5.20}$$

şi funcţia de transfer corespunzătoare:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots.+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots.+a_nz^{-m}} \tag{5.21}$$

au următoarele condiţii de realizabilitate:

- dacă $b_0 \neq 0$ atunci $a_0 \neq 0$;
- dacă $b_0 = 0$, $a_0 = 0$ şi $b_1 \neq 0$, atunci $a_1 \neq 0$ etc indiferent dacă $m \underset{\geq}{\leq} n$,

ii) o ecuaţie cu diferenţe

$$\begin{aligned} a'_0\,y(k)+a'_1\,y(k+1)+\ldots+a'_n\,y(k+n)&= \\ =b'_0\,u(k)+b'_1\,u(k+1)+\ldots+b'_m\,u(k+m)& \end{aligned} \tag{5.22}$$

şi funcţia de transfer corespunzătoare

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b'_0+b'_1 z+\ldots.+b'_m z^m}{a'_0+a'_1 z+\ldots.+a'_n z^n} \qquad (5.23)$$

sunt realizabile dacă $m \le n$ pentru $a'_n \neq 0$.

f) Relația între răspunsul la impuls și răspunsul indicial

Suma de convoluție (5.3) obținută pentru o funcție treaptă unitară $u(kT) = 1, k \ge 0$ ca semnal de intrare conduce la răspunsul sistemului:

$$h(n)=\sum_{k=0}^{\infty} g(n-k). \qquad (5.24)$$

Aceasta arată că răspunsul indicial al sistemului rezultă din superpoziția răspunsurilor la impuls deplasate în timp.

Rescriind (5.24) pt $n = n - 1$

$$h(n-1)=\sum_{k=0}^{\infty} g(n-1-k) \qquad (5.25)$$

$$h(n)=\sum_{k=0}^{\infty} g(n-1-k)+g(n).$$

Răspunsul la impuls poate fi evaluat atunci când răspunsul indicial este cunoscut astfel:

$$g(n)=h(n)-h(n-1)=\Delta h(n). \qquad (5.26)$$

g) Sisteme liniare eşantionate în cascadă

Pentru un sistem liniar G(s) cu intrare şi ieşire eşantionată, corespondența în discret (pentru semnal de intrare discret u(k) şi semnal de ieşire discret y(k)) este dată de:

$$Y(z)=G(z)U(z)=Z\left\{L^{-1}\{G(s)\}\right\}U(z). \qquad (5.27)$$

Semnul produs dintre cele două elemente din membrul drept al ecuației semnifică faptul că există un eşantionor între semnalul continuu u(t) şi funcția de transfer G(s). Ecuaţia (5.27) indică faptul că toate elementele ce nu sunt separate printr-un eşantionor trebuie multiplicate între ele mai întâi. Abia după aceea se poate calcula $G(z)=Z\left\{L^{-1}\{(Gs)\}\right\}$.

Corespunzător fig.5.4 a), următoarea ecuație poate fi scrisă pentru sistemele în cascadă ce nu sunt separate de un eşantionor:

$$Y(z)=U(z)Z\left\{L^{-1}\{G_1(s)G_2(s)\}\right\}=U(z)G_1G_2(z). \qquad (5.28)$$

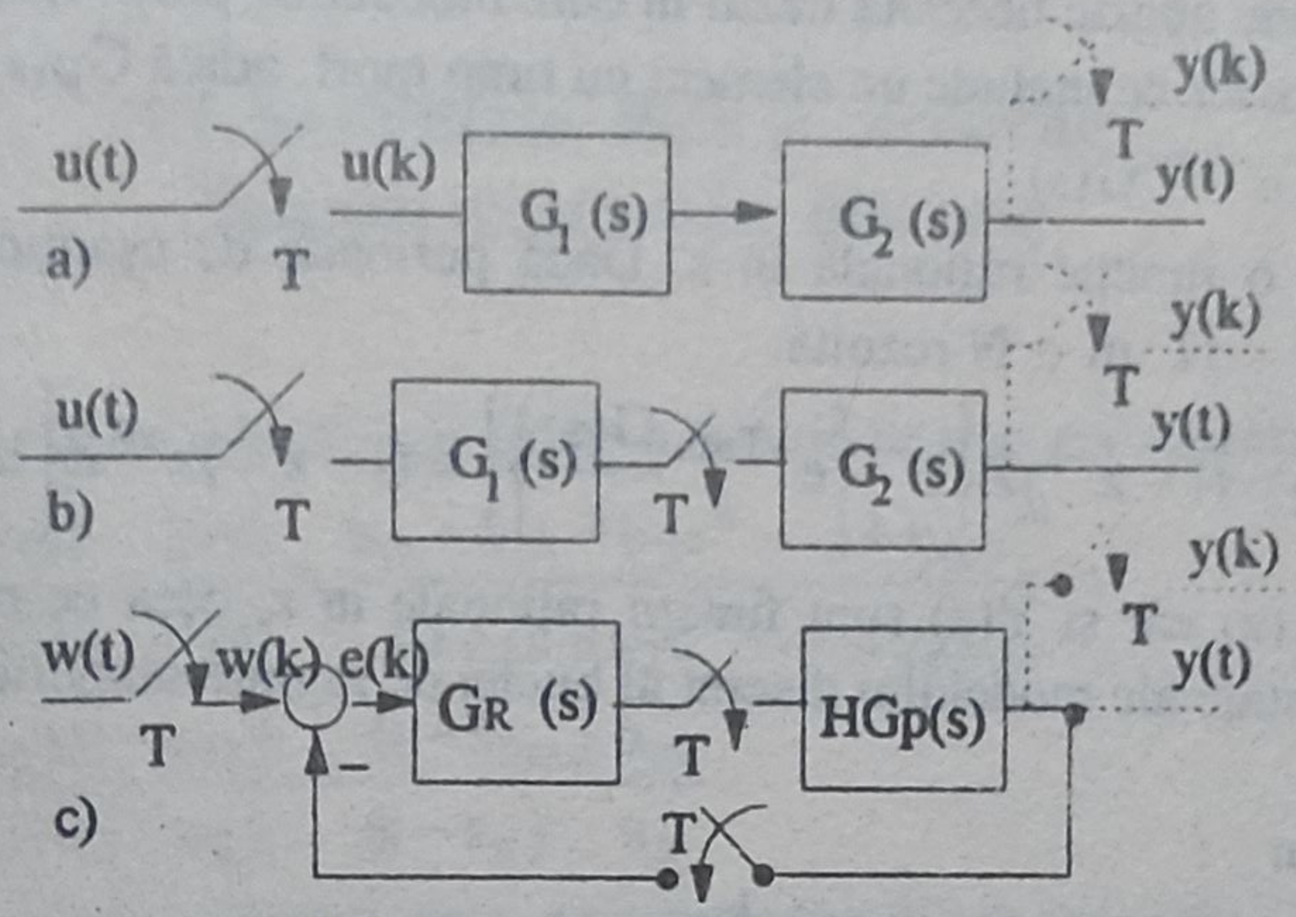


Fig.5.4 Sisteme în cascadă cu eşantionare:

a) Sistemele în cascadă nu sunt separate de un eşantionor;

b) Sistemele în cascadă sunt separate de un eşantionor;

c) schemă cu reacţie negativă discretă

În cazul în care acestea sunt separate de un eşantionor:

$$Y(z) = U(z)Z\left\{L^{-1}\{G_1(s)\}\right\}Z\left\{L^{-1}\{G_2(s)\}\right\} = U(z)G_1(z)G_2(z). \qquad (5.29)$$

Eşantionorul ce face separarea celor 2 sisteme în cascadă este deci descris de semnul produs dintre $G_1(z)$ şi $G_2(z)$.

$$G_1G_2(z) \neq G_1(z)\cdot G_2(z). \qquad (5.30)$$

Notă. Pentru elementele de întârziere pură (5.30) este adevărată, ca şi cum eşantionorul nu ar schimba comportarea sistemului.

În cazul unei bucle de reglare cu reacţie negativă, ca cea din fig.5.4.c, funcţiile de transfer pot fi evaluate după cum urmează:

$$Y(z) = HG_P(z)\cdot G_R(z)\left[W(z) - Y(z)\right]$$

$$Gw(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{HG_P(z)\cdot G_R(z)}{1 + HG_P(z)\cdot G_R(z)}$$

unde

$$HG_P(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{G_P(s)}{s}\right\}\right\}$$

pentru extrapolator de ordin 0.

O mențiune aparte necesită cazul în care modelarea părții fixate conduce la o funcție de transfer ce include un element cu timp mort, adică Gp(s) are forma:

$$G_p(s) = e^{-Tms}G(s)$$

unde G(s) este o funcție rațională în s. Dacă perioada de eșantionare se alege astfel încât Tm = dT, m ∈ N rezultă:

$$HG_p(z) = (1-z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left\{e^{-Tms}\frac{G(s)}{s}\right\}\right\} = (1-z^{-1})z^{-d}Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}.$$

Atât Gw(z) cât și Y(z) sunt funcții raționale în z, ceea ce constituie unul din marile avantaje ale modelului discret al buclei de reglare numerice.

Exemplu

$G_1(s) = \frac{k_1}{1+T_1 s}$ și $G_2(s) = \frac{k_2}{1+T_2 s}$

Considerăm cazul din 5.4.a)

$$G(z) = Z\left\{L^{-1}\{G_1(s)G_2(s)\}\right\} = .Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{c}{(s+a)(s+b)}\right\}\right\} =$$

$$\frac{c}{b-a}\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}, a = 1/T_1, b = 1/T_2, c = k_1k_2ab.$$

Cazul din 5.4.b)

$$G(z) = Z\left\{L^{-1}\{G_1(s)\}\right\}Z\left\{L^{-1}\{G_2(s)\}\right\} =$$

$$Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{k_1 a}{s+a}\right\}\right\}Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{k_2 b}{s+b}\right\}\right\} = \frac{k_1k_2ab}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}.$$

VI. Stabilitate. Polii şi zerourile funcţiei de transfer discrete

Un proces liniar este descris printr-o funcţie de transfer raţională de forma

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0+b_1s+b_2s^2+\ldots+b_ms^m}{1+a_1s+a_2s^2+\ldots+a_ns^n}= \tag{6.1}$$

$$=\frac{(s-s_{01})(s-s_{02})\ldots\ldots(s-s_{0m})}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots\ldots(s-s_n)}\frac{b_m}{a_n}.$$

Pentru procesele eşantionate corespunzătoare, cu sau fără extrapolator, rezultă funcţii de transfer în z raţionale:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}=\frac{(b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_m)z^{n-m}}{z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}. \tag{6.2}$$

$$\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-n}}=\frac{(z-z_{01})(z-z_{02})\ldots\ldots(z-z_{0m})}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots\ldots(z-z_n)}\frac{b_m}{a_n}$$

Rădăcinile $z_{pi}, i=\overline{1,n}$ ale numitorului polinomului $A(z) = 0$ sunt poli, iar rădăcinile $z_{0i}, i=\overline{1,n}$ ale numărătorului polinomial sunt zerourile funcţiei de transfer în z.

6.1. Amplasarea polilor în planul z

Să considerăm sistemul proporţional cu întârziere de ordinul I, care a mai fost tratat şi anterior:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k'}{a+s} \tag{6.3}$$

având polul $s_1 = -a$. Sistemul discret corespunzător, fără extrapolator, este dat prin funcţia de transfer:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{k'z}{z-z_1}=\frac{k'}{1-a_1z^{-1}} \tag{6.4}$$

având un pol

$$z_1=a_1=e^{-aT}. \tag{6.5}$$

Ecuația cu diferențe corespunzătoare este:

$$Y(k) - a_1 Y(k-1) = k'u(k). \tag{6.6}$$

Pentru o condiție inițială $y(0) \neq 0$ și pentru $u(k) = 0$, ecuația cu diferențe omogenă este:

$$y(k) - a_1 y(k-1) = 0 \tag{6.7}$$

ceea ce conduce la

$$\begin{aligned} y(1) &= a_1 y(0) \\ y(2) &= a_1 y(1) = a_1^2 y(0) \\ &\vdots \\ y(k) &= \qquad = a_1^k y(0). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Acest sistem de ordinul I converge la 0 și este asimptotic stabil doar dacă $|a_1| < 1$. Comportarea în domeniul timpului y(k) pentru diferite poziții ale polului a_1 în planul z este prezentată în fig.6.1.

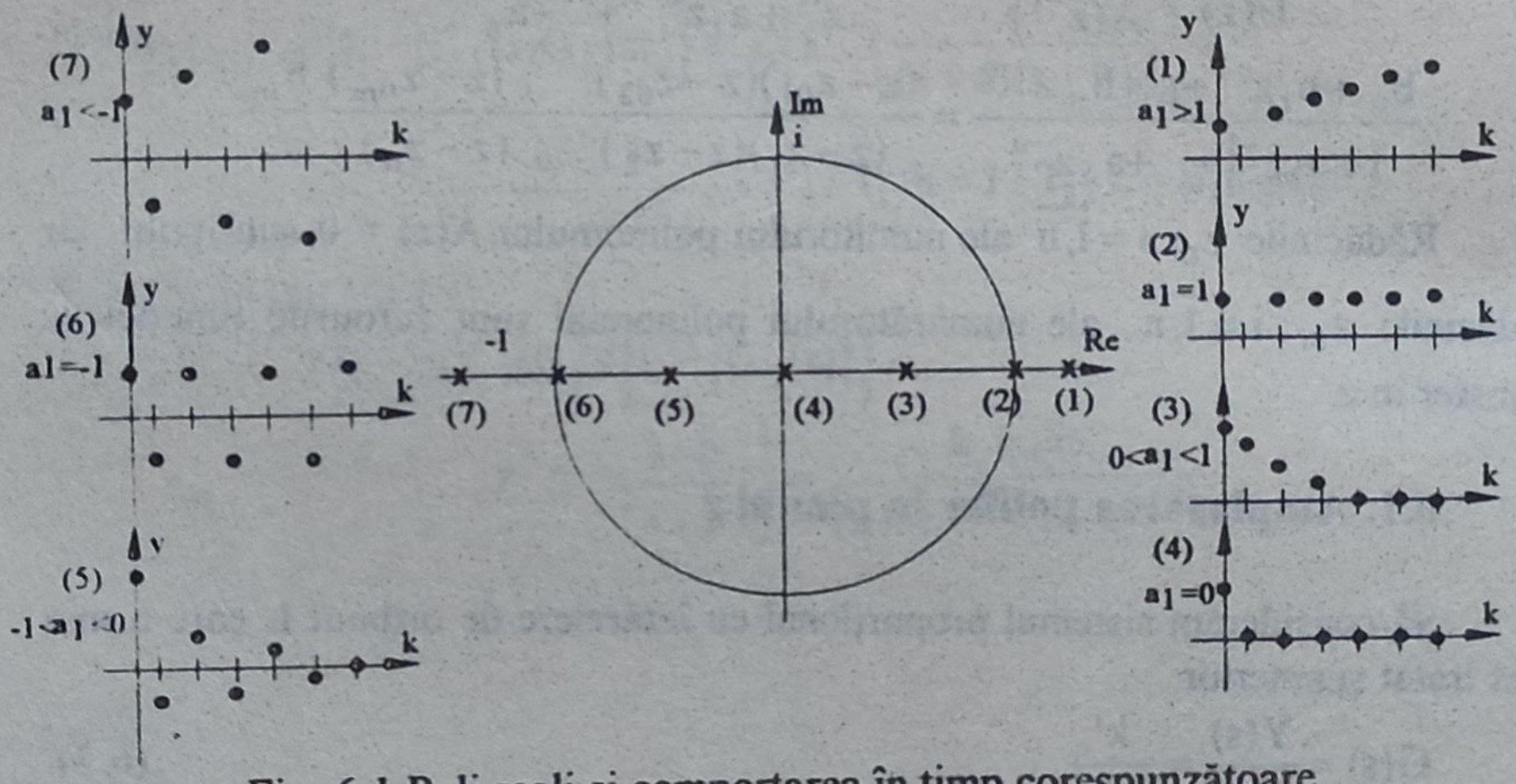


Fig. 6.1 Poli reali și comportarea în timp corespunzătoare

Pentru o valoare negativă a lui a_1 rezultă o comportare periodică cu alternare de semn care nu este posibilă pentru un sistem de ordinul întâi continuu.

De asemenea polii în planul s și în planul z sunt în corespondență prin $z = a_1 = e^{s_1 T}$ (6.9). Pe baza acestei relații rezultă că nu pot rezulta decât poli pozitivi în planul z. Deci polii reali negativi nu au corespondență în polii de pe axa reală a planului s.

Totuşi poate apare situația în care un pol real dublu $z_1 < 0$ este echivalent cu o pereche de poli complex-conjugați în planul s, așa cum se va arăta în continuare.

6.2. Poli complex-conjugați în planul z

Fie funcția de transfer:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k}{T^2s^2+2\xi Ts+1}=\frac{k\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}=$$

$$=\frac{k(a^2+\omega_1^2)}{(s+a)^2+\omega_1^2}=\frac{k(a^2+\omega_1^2)}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

$$a=\xi/T=\xi\omega_0 \qquad (6.10)$$

$$\omega_1^2=\frac{1}{T^2}(1-\xi^2)=\omega_0^2(1-\xi^2)$$

$$s_{1,2}=-a\pm j\omega_1$$

ξ = amortizarea, ω_0 = pulsația naturală.

Funcția de transfer în z corespunzătoare, fără extrapolator de ordin 0 este:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{\left(e^{-aT}k\dfrac{a^2+\omega_1^2}{\omega_1}\sin\omega_1 T\right)z}{z^2-(ze^{-aT}\cos\omega_1 T)z+e^{-zaT}}=\frac{b_1}{(z-z_1)(z-z_2)} \qquad (6.11)$$

unde polii $z_{1,2}$ sunt:

$$z_{1,2}=e^{-aT}e^{\pm j\omega_1 T}=e^{-aT}(\cos\omega_1 T\pm j\sin\omega_1 T)$$

iar ecuația omogenă devine:

$$y(k)=(-2e^{-aT}\cos\omega_1 T)y(k-1)+e^{-2aT}y(k-2)=0. \qquad (6.12)$$

Pentru o valoare inițială arbitrară Y(0) şi o valoare inițială aleasă ca fiind $Y(1)=e^{-aT}\cos\omega_1 T$, soluția ecuației este

$$y(k)=(e^{-aT})^k\cos k\omega_1 T. \qquad (6.13)$$

Comportarea sistemului în domeniul timpului este dată în fig.6.2 pentru cazul $\omega_1 T = 30^o$ = constant (situațiile 1, 2 si 3 din fig. 6.2), apoi pentru cazurile $\omega_1 T = 90$=constant (situația 4 din fig. 6.2) şi pentru cazul $\omega_1 T = 150^o$ (situația 5 din fig. 6.2).

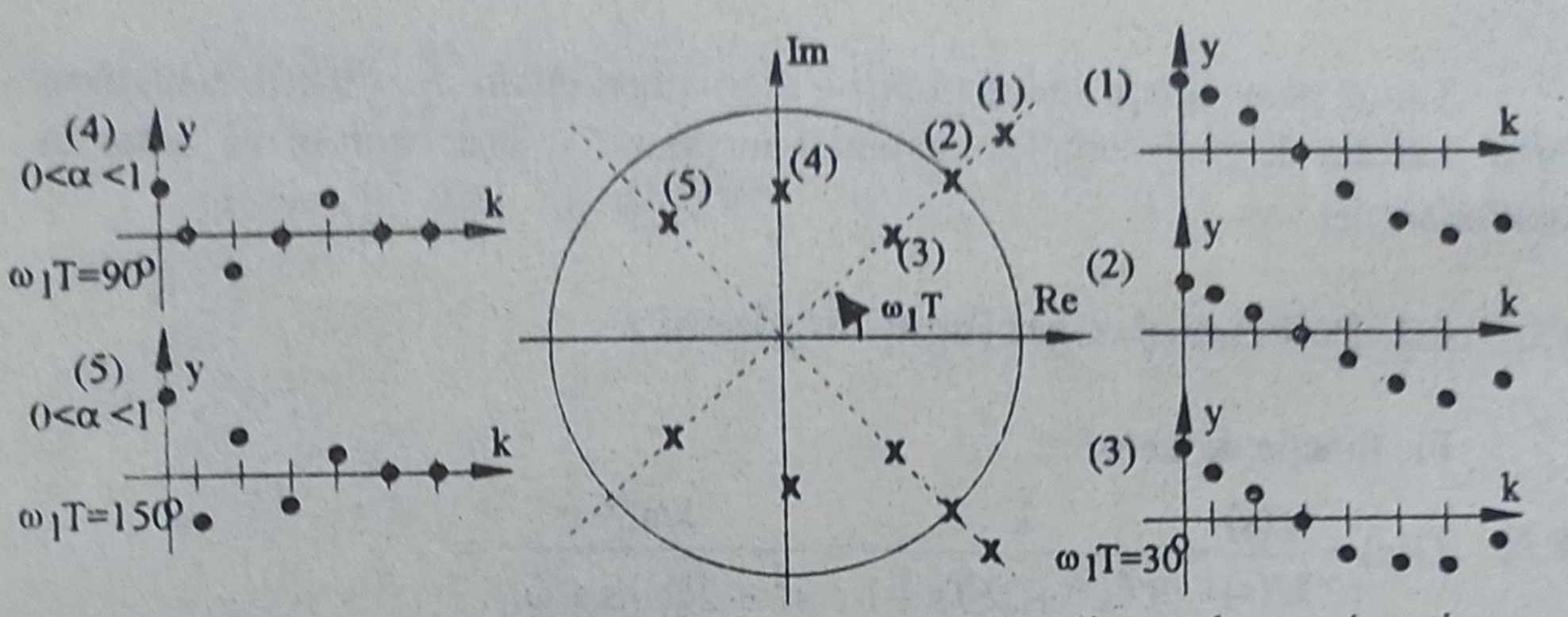


Fig.6.2 Comportarea sistemului cu o pereche de poli complex-conjugați

Dacă $\omega_1 T$ crește, adică ω_1 crește la T constant se obțin următoarele rezultate. Pentru $\omega_1 T = 90^o$, polii sunt plasați pe axa imaginară și y(k) devine 0 pentru k = 1,3, 5 și își schimbă semnul pentru k = 0,2,4,... . Alternanța semnului lui y(k) se obține și pentru $90^o < \omega_1 T < 180^o$. Dacă polii complex-conjugați sunt situați în interiorul cercului de rază unitară rezultă o comportare asimptotic stabilă pentru $\alpha < 1$.

6.3 Corespondența dintre planul s și planul z

Atât pentru poli complex-conjugați cât și pentru poli reali, ecuația folosită pentru a mapa polii din planul s în planul z este:

$$s_j = \delta_j \pm j\omega_j \tag{6.13}$$

în planul z este

$$Z_j = e^{s_j T} = e^{T(\delta_j \pm j\omega_j)} = e^{\delta_j T} e^{\pm j\omega_j T}. \tag{6.14}$$

În consecință, polii z_j vor avea modulul și faza

$$|z_j| = e^{\delta_j T} \text{ și } \varphi_j = \pm\omega_j T. \tag{6.15}$$

Conform ecuației de transformare rezultă următoarele:

a) axa imaginară $0 \le j\omega_j \le j\frac{\omega_e}{2} = j\frac{\pi}{T}$ din planul s devine un semicerc de rază unitară în planul z;

b) axa imaginară $-j\frac{\omega_e}{2} \le j\omega_j \le 0$ din planul s devine semicercul inferior de rază unitară în planul z;

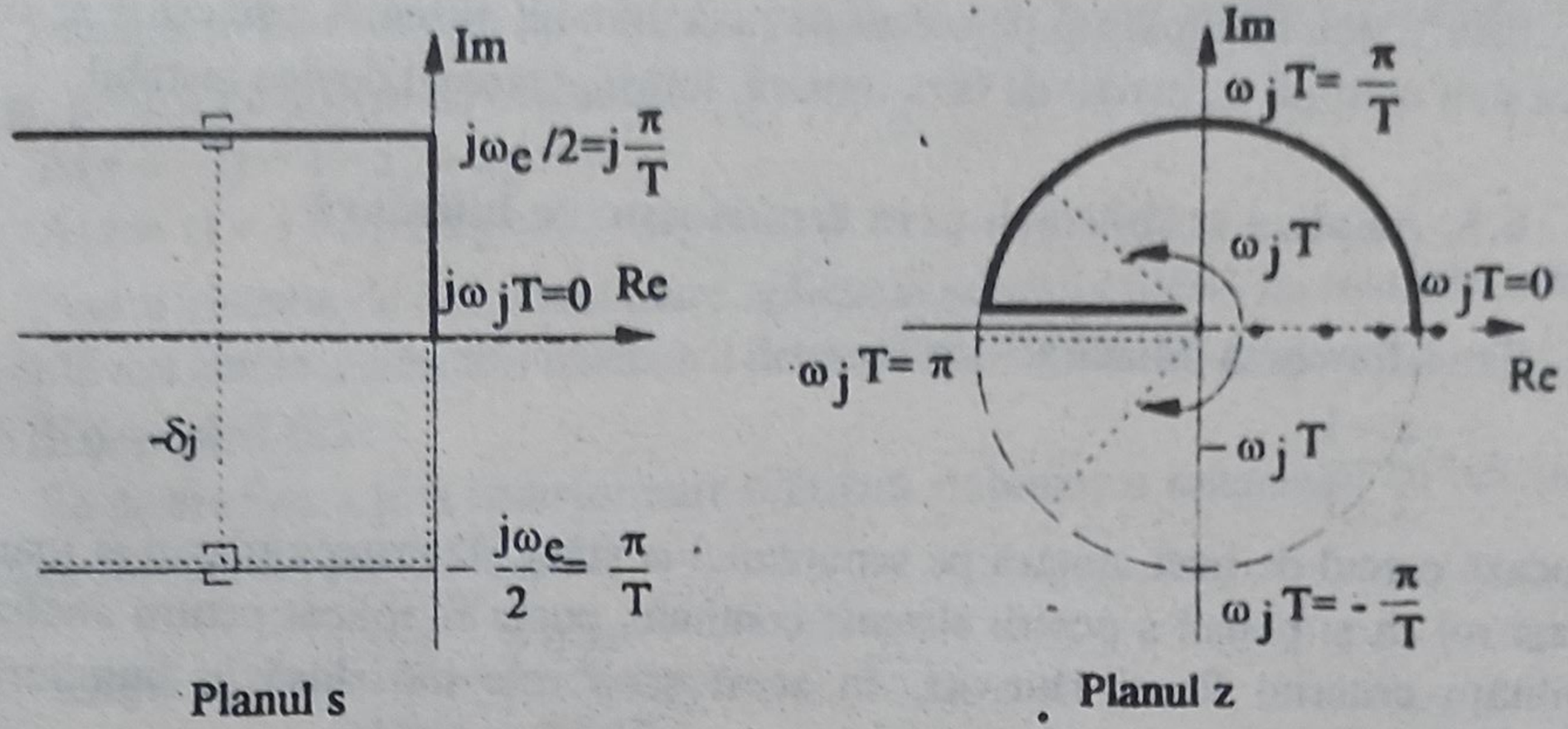


Fig.6.3 Transformarea planului s în plan z

c) axa reală negativă $-\infty < \delta_j \le 0$ din planul s ($j\omega_j = 0$) devine în planul z segmentul de axă $0 < z_j \le 1$.

d) axa reală pozitivă $\infty > \delta_j \ge 0$ din planul s ($j\omega_j = 0$) devine în planul z porțiunea din axa reală pozitivă $1 \le z_j < \infty$.

e) Paralela la axa negativă $j\omega_e = j\frac{\pi}{T}$ cu $-\infty < \delta_j \le 0$ din planul s este mapată pe axa negativă a planului z în porțiunea $-1 \le z_j \le 0$.

f) Semiplanul stâng al planului s devine interiorul cercului de rază unitară în planul z.

g) Semiplanul drept al planului s devine exteriorul cercului de rază unitară în planul z, ceea ce înseamnă că polii instabili din planul s vor fi situați în această regiune.

h) Polii critic stabili de pe axa imaginară a planului s sunt situați pe cercul de rază unitară în planul z.

6.4. Condiția de stabilitate asimptotică

Conform celor expuse în secțiunea anterioară, un sistem liniar discret este *asimptotic stabil* dacă polii funcției de transfer în z sau rădăcinile *ecuației caracteristice*

$$A(z)=(z-z_1)(z-z_2)....(z-z_m)=0 \qquad (6.16)$$

sunt plasați în interiorul cercului de rază unitară.

Aceasta conduce la

$$|z_j| < 1, \quad j = \overline{1,m} \tag{6.17}$$

Pentru poli reali plasați pe cercul de rază unitară, sistemul este critic stabil. Pentru poli multipli pe cercul de rază unitară, totuşi, sistemul devine instabil.

6.5. Analiza stabilității prin transformare biliniară

Transformarea biliniară

$$w = \frac{z-1}{z+1} \tag{6.18}$$

mapează cercul de rază unitară pe semiplanul ω stâng. Deoarece planul ω joacă acelaşi rol ca şi planul s pentru sisteme continue, poate fi aplicat pentru analiza stabilității criteriul Routh-Hurwitz. În acest scop este introdusă în numitorul funcției de transfer

$$A(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m \tag{6.19}$$

transformarea inversă

$$z = \frac{1+w}{1-w} \tag{6.20}$$

Aceasta conduce la:

$$\overline{A}(w) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^m + a_1\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{m-1} + \ldots + a_m \tag{6.21}$$

Rezultă următoarele:

a) Sistemul nu este monotonic instabil dacă toți coeficienții polinomului caracteristic există şi au toți acelaşi semn algebric;

b) Sistemul nu este oscilator instabil dacă determinanții Hurwitz sunt pozitivi pentru sisteme mai mari de ordinul 2.

Exemplul 6.1

Fie numitorul de ordin 2

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2 \Rightarrow$$

$$\overline{A}(w) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + a_1\left(\frac{1+w}{1-w}\right) + a_2$$

$$\overline{A}(w) = (1+w)^2 + a_1(1+w)(1-w) + a_2(1-w)^2 =$$

$$= (1-a_1+a_2)w^2 + 2(1-a_2)w + (1+a_1+a_2)$$

Dacă toți coeficienții lui $\overline{A}(w)$ există și au semn pozitiv rezultă, în general, pentru un sistem de ordinul II

$$A(z=-1)=1-a_1+a_2>0$$
$$A(z=1)=1+a_1+a_2>0,\quad a_2<1.$$

Pentru sisteme de ordin mai mare aplicarea acestui criteriu nu mai este atât de simplă din cauza necesității calculării determinanților Hurwitz.

Exemplul 6.2

Să se analizeze prin transformare biliniară stabilitatea sistemului cu reacție negativă format din partea fixată:

$$Eh_0G_p(z)=\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

și un regulator proporțional $G_R(z)=q_0$ plasat pe calea directă.

Ecuația caracteristică

$$1+Eh_0G_p(z)\cdot G_R(z)=0$$

conduce la:

$$z^2+(a_1+b_1q_0)z+(a_2+b_2q_0)=0$$

și condițiile sunt

$$q_0<(1+a_2)/b_2$$
$$q_0>(a_1-a_2-1)/(b_2-b_1)$$
$$q_0>(1+a_1+a_2)/(b_1+b_2).$$

Spre deosebire de cazul sistemelor continue ce permiteau $q_0\to 0$. amplificarea regulatoarelor sistemelor discrete este limitată superior de un q_{0max}. Aceasta arată că, în comparație cu sistemele continue, sistemele de control discrete au un domeniu de stabilitate mai mic.

6.6. Criteriul Shur-Cohn-Jury

Și prin acest criteriu se dezvoltă unele condiții pentru coeficienții polinomului caracteristic:

$$A(z)=a'_m z^m+a'_{m-1}z^{m-1}+.....+a'_1 z+a'_0=0 \qquad (6.22)$$

pentru a asigura plasarea polilor în interiorul cercului de rază unitară.

Se scriu matricele:

$$A_k=\begin{bmatrix} a'_0 & a'_1 & \cdots & a'_{k-1} \\ 0 & a'_0 & \cdots & a'_{k-2} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a'_0 \end{bmatrix},\ B_k=\begin{bmatrix} a'_{m-(k-1)} & \cdots & a'_{m-1} & a'_m \\ a'_{m-(k-2)} & \cdots & a'_m & 0 \\ \vdots & & & \\ a'_m & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

şi determinanţii

$$C_k=\det[A_k+B_k],\quad D_k=\det[A_k-B_k]. \quad (6.24)$$

Condiţiile necesare şi suficiente pentru ca polii lui A(z) să se situeze în interiorul cercului de rază 1 sunt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{m par:} & \text{m impar} \\ A(1)>0 & (-1)^m A(-1)>0 \\ C_2<0, D_2<0 & C_1>0, D_1<0 \\ C_4>0, D_4>0 & C_3<0, D_3>0 \\ C_6<0, D_6<0 & C_5>0, D_5<0 \\ \vdots & \vdots \end{array}\right\} \quad (6.25)$$

Pentru sistemele de ordin mare, efortul de calcul rezultă relativ important. Din acest motiv un criteriu de stabilitate mai simplu bazat pe criteriul Shur-Cohn-Jury este prezentat în continuare, care mai este numit şi "criteriul Jury".

Se scrie următoarea schemă, presupunând $a_m > 0$.

nr. rând								
1	a'_0	a'_1	a'_2	.....	a'_{m-k}	.....	a'_{m-1}	a'_m
2	a'_m	a'_{m-1}	a'_{m-2}	.....	a'_k	.....	a'_1	a'_0
3	b_0	b_1	b_2	.....	b_{m-k}	.....	b_{m-1}	
4	b_{m-1}	b_{m-2}	b_{m-3}	.....	b_{k+1}	.....	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	.....	c_{m-k}	.....	c_{m-2}	
6	c_{m-2}	c_{m-3}	c_{m-4}	.....	c_{k+2}	.....	c_0	
2m-5	l_0	l_1	l_2	l_3				
2m-4	l_3	l_2	l_1	l_0				
2m-3	m_0	m_1	m_2					

Elementele din grupurile de câte 2 rânduri din schemă se calculează astfel:

$$b_k = \begin{vmatrix} a'_0 & a'_{m-k} \\ a'_m & a'_k \end{vmatrix},\quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{m-1-k} \\ b_{m-1} & b_k \end{vmatrix}$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{m-2-k} \\ c_{m-2} & c_k \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots m_0 = \begin{vmatrix} l_0 & l_3 \\ l_3 & l_0 \end{vmatrix} \quad m = \begin{vmatrix} l_0 & l_1 \\ l_3 & l_2 \end{vmatrix}. \tag{6.26}$$

Condiţiile necesare şi suficiente ca polii lui A(z) să se situeze în interiorul cercului de rază unitară sunt:

$$\left.\begin{array}{ll} A(1) > 0 & (-1)^m A(-1) > 0 \\ |a'_0| < a'_m & \\ |b_0| < |b_{m-1}| & \\ |c_0| < |c_{m-2}| & \\ \vdots & \\ |m_0| < |m_2| & \end{array}\right\} \tag{6.27}$$

Rezultă că pentru un sistem de ordin m se obţin m+1 condiţii. Pentru sisteme de ordin redus se obţin următoarele rezultate:

$$m = 2 \quad A(1) > 0 \quad A(-1) > 0 \quad |a'_0| < a'_2 \tag{6.28}$$

$$m = 3 \quad A(1) > 0 \quad -A(-1) > 0 \quad |a'_0| < a'_3 \quad |b_0| > |b_2|. \tag{6.29}$$

Dacă primul sau ultimul element din rând este 0 sau întregul rând este 0, apar "cazuri singulare" care trebuie tratate diferit.

Exemplul 6.3

Un sistem de ordinul 3 are ecuaţia caracteristică

$$A(z) = z^3 + a'_2 z^2 + a'_1 z + a'_0 = 0 .$$

Schema Jury este:

1	a'_0	a'_1	a'_2	1
2	1	a'_2	a'_1	a'_0
3	b_0	b_1	b_2	

şi condiţiile de stabilitate sunt:

$$A(1) = 1 + a'_2 + a'_1 + a'_0 > 0$$

$$-A(-1) = -1 + a'_2 - a'_1 + a'_0 > 0$$

$$a'_0 < 1$$

$$|b_0| > |b_2| \rightarrow \left|a'^2_0 - 1\right| > \left|a'_0 a'_2 - a'_1\right|.$$

Prin utilizarea calculatoarelor numerice ecuațiile caracteristice sunt rezolvate prin programe de calcul a rădăcinilor şi nu prin criterii de stabilitate. Se obțin astfel nu numai informații asupra stabilității, ci şi amplasarea polilor.

6.7. Plasarea zerourilor în planul z

Spre deosebire de poli, nu se pot stabili relații simple între zerourile funcțiilor de transfer G(s) şi G(z). De aceea concluzii generale nu se pot trage decât în cazuri speciale.

Folosind funcția de transfer continuă (6.1) şi presupunând n > m, ceea ce înseamnă $G(s) \to 0$ pentru $|s| \to \infty$ (o funcție de transfer realizabilă), G(s) are maxim (n-1) zerouri, iar G(z) are de obicei (n-1) zerouri. G(z) va avea zerouri chiar dacă G(s) nu are zerouri, aşa cum se poate vedea din tabelele de transformate z. Amplasarea zerourile funcției de transfer este de asemenea influențată de prezența extrapolatorului.

6.8. Analiza erorilor staționare

Eroarea staționară a unui sistem automat liniar – cu sau fără eşantionare – cu reacție unitară se defineşte ca diferența dintre semnalul referință r(t) şi semnalul de ieşire real y(t) în regim staționar:

$$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty} [r(t) - y(t)]. \qquad (6.30)$$

Eroarea staționară a unui sistem automat discret se poate afla cu ajutorul teoremei valorii finale, pornind de la imaginile în planul z ale referinței şi ieşirii:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{n\to\infty} e(nT) = \lim_{z-1}\left(1 - z^{-1}\right)E(z). \qquad (6.31)$$

La fel ca şi în cazul sistemelor închise liniare cu acțiune continuă, şi în cazul sistemelor discrete eroarea staționară depinde de natura sistemului, dar şi de tipul semnalului de intrare (de referință). Conceptul de coeficienți generalizați ai erorii poate fi extins şi la sistemele discrete.

Se consideră sistemul automat cu eşantionare cu reacție unitară din fig.6.4. Eroarea se poate exprima în funcție de G(s) sau în funcție de $G_0(s)$, funcția de transfer a căii directe sau respectiv a sistemului închis:

$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z) - E(z)G(z) \text{ si deci } E(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)} \qquad (6.32).$$

$$E(z) = R(z) - R(z)G_0(z) = R(z)\left[1 - G_0(z)\right] \tag{6.33}$$

Dacă la intrarea sistemului închis se aplică semnale tipice – funcții treaptă, rampă, parabolă – eroarea staționară se poate evalua prin coeficienții erorii. Se reamintesc transformatele z a acestor semnale tipice:

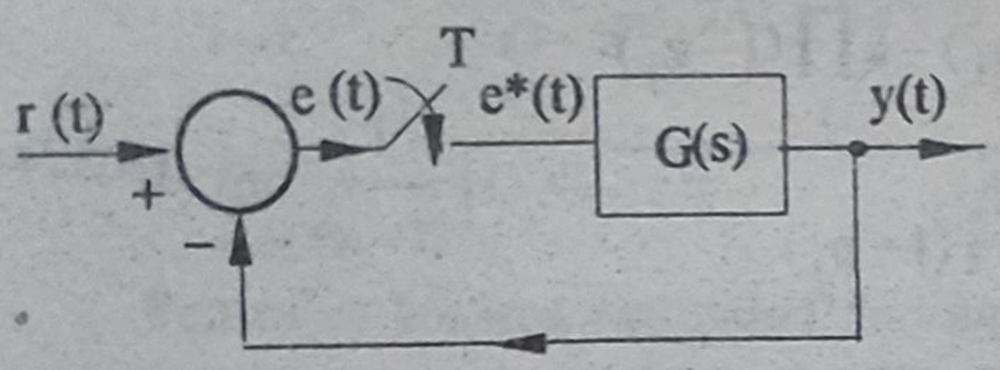


Fig.6.4

$$Z[1(t)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$Z[t] = \frac{Tz^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$Z\left[t^n\right] = \frac{p(z)}{\left(1 - z^{-1}\right)^{n+1}} = \frac{P'(z)}{(z-1)^{n+1}}$$

Eroarea staționară a sistemelor discrete cu semnal de intrare treaptă

Folosind relația (6.31), eroarea staționară în cazul semnalului de intrare treaptă unitară rezultă:

$$e_{sp} = \lim_{z \to 1}\left(1 - z^{-1}\right)\frac{1}{\left(1 - z^{-1}\right)}\frac{1}{1 + G(z)} = \lim_{z \to 1}\frac{1}{1 + G(z)} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{z \to 1} G(t)} \tag{6.34}$$

Indicele P al e_{sp} semnifică "poziție" şi corespunde situației sistemelor de urmărire, pentru care prin semnal de intrare treaptă se prescrie o poziție a elementului mobil.

Se notează $K_p = \lim\limits_{z \to 1} G(z)$ şi definim acest K_p drept coeficient al erorii de poziție.

Relația (6.34) devine:

$$e_{sp} = \frac{1}{1 + K_p} \text{ sau } K_p = \frac{1 - e_{sp}}{e_{sp}} \tag{6.35}$$

În cazul în care eroarea se exprimă prin (6.33),

$$e_{sp} = \lim_{z \to 1}\left(1 - z^{-1}\right)\frac{1}{\left(1 - z^{-1}\right)}\left[1 - G_0(z)\right] = \lim_{z \to 1}\left[1 - G_0(z)\right]. \tag{6.36}$$

Pentru ca e_{sp} să fie nulă este necesar ca $\lim_{z\to 1} G_0(z) = 1$. Din (6.36) rezultă şi legătura dintre eroarea staţionară de poziţie şi polii–zerourile funcţiei de transfer a sistemului închis, $G_0(z)$:

$$e_{sp} = \lim_{z\to 1}\left[1 - \frac{k\prod_1^m (z-z_i)}{\prod_1^n (z-p_i)}\right] = \frac{\prod_1^n (1-p_i) - k\prod_1^m (1-z_i)}{\prod_1^n (1-p_i)} \qquad (6.37)$$

în care z_i şi p_i sunt zerourile, respectiv polii funcţiei de transfer a sistemului închis

Eroarea staţionară a sistemelor discrete cu semnal de intrare rampă

Dacă semnalul de intrare al sistemului este o funcţie rampă, $r(t) = t$,

$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{Tz^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$, din relaţiile (6.31) şi (6.32) rezultă:

$$e_{s_v} = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\frac{1}{(1+G(z))} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{\frac{(z-1)}{T}G(z)}. \qquad (6.38)$$

Indicele v semnifică "viteza", existând o corespondenţă cu situaţia sistemelor de urmărire la care semnalul de referinţă creşte liniar în timp, impunându-se astfel o viteză a elementului urmăritor.

Se defineşte coeficientul erorii staţionare de viteză prin:

$$k_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}[(z-1)G(z)] \qquad (6.39)$$

deci : $e_{s_v} = \frac{1}{k_v}$.

Fizic, coeficientul erorii staţionare de viteză reprezintă raportul dintre viteza dorită la ieşire şi eroarea staţionară de viteză. Este de observat faptul că eroarea de viteză definită mai sus nu este o eroare a vitezei de răspuns, ci o eroare de poziţie provocată de întârzierea răspunsului la ieşire, în regimul stabilizat, fig. 6.5

Legătura dintre coeficientul erorii staționare de viteză k_v și polii-zerourile funcției de transfer a sistemului închis se obține din relația (6.33):

$$e_{s_v} = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\left[1-G_0(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\frac{Tz}{(z-1)^2}\left[1-G_0(z)\right] = \tag{6.40}$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{T}{(z-1)}\left[1-G_0(z)\right].$$

Pentru ca eroarea staționară de viteză să fie finită, este necesar ca $1-G_0(z)$ să aibă un zero în $z=1$, deci ca $G_0(z)$ la limită ($z\to 1$) să fie 1, ceea ce echivalează cu condiția de eroare staționară de poziție nulă. În acest caz, nedeterminarea din relația (5.27) se rezolvă astfel:

$$e_{s_v} = \frac{1}{k_v} = -\lim_{z\to 1} T\frac{d}{dz}\left[G_0(z)\right] = -\lim_{z\to 1} T\frac{d}{dz}\left[\frac{B(z)}{A(z)}\right]$$

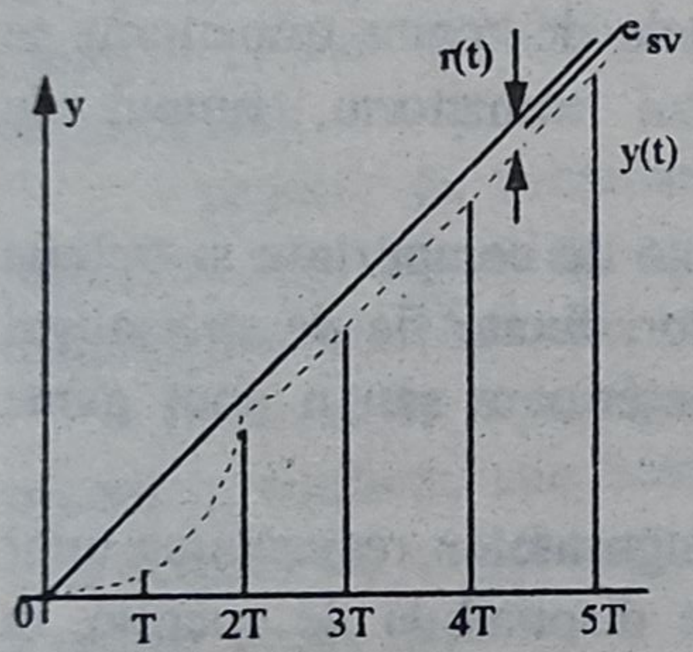


Fig. 6.5.

și deoarece $\lim_{z\to 1} G_0(z) = \lim_{z\to 1}\frac{B(z)}{A(z)}$,

$$e_{s_v} = -\lim_{z\to 1}\frac{T\frac{d}{dz}\left[\frac{B(z)}{A(z)}\right]}{\frac{B(z)}{A(z)}} = -T\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\ln\frac{B(z)}{A(z)}\right].$$

Utilizând descompunerea în factori a lui B(z) și A(z) pentru evidențierea zerourilor și respectiv a polilor funcției de transfer pentru sistemul închis, eroarea staționară de viteză se poate scrie sub forma:

$$e_{s_v} = -T\lim_{z\to 1}\{\frac{d}{dz}[\ln k + \ln(z-z_1) + \ln(z-z_2) + \ldots + \ln(z-z_m) -$$
$$-\ln(z-p_1) - \ln(z-p_2) - \ldots - \ln(z-z_n)]\}$$

sau:

$$e_{s_v} = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-pj} - \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{1-j}\right)T. \tag{6.41}$$

Această ultimă relație stabilește o legătură simplă între eroarea staționară de viteză și repartiția poli-zerouri a sistemului discret.

VII. Sinteza sistemelor automate discrete

7.1. Date iniţiale şi obiective în proiectarea sistemelor discrete

În cazul proiectării sistemelor discrete datele iniţiale şi obiectivele urmărite sunt similare celor din cazul proiectării unui sistem continuu. Datele iniţiale includ caracteristicile procesului, prezentate fie sub forma unor ecuaţii diferenţiale în domeniul timp, fie sub forma unor funcţii de transfer.

Dacă pentru partea fixată continuă datele iniţiale se reprezintă sub forma unor funcţii de transfer sau a unor ecuaţii diferenţiale, atunci este necesară obţinerea modelului discret al părţii fixate sau procesului (vezi cap.7.2).

Obiectivele urmărite prin proiectare se referă la performanţele impuse sistemului discret proiectat în cazul funcţionării în buclă închisă. Aceste performanţe se referă la regimurile staţionare şi tranzitorii. Performanţele de regim staţionar sunt: valoarea admisă pentru eroarea staţionară la semnale specificate, coeficientul erorii de viteză. Performanţele de regim tranzitoriu se referă la: valoarea suprareglării, durata regimului tranzitoriu, timpul de supraurmărire, timpul creştere etc.

Aceste performanţe pot fi denumite performanţe de comportare şi trebuie asigurate de sistemul proiectat fie pe baza unor valori fixate fie de specialiştii tehnologi, fie de automatişti, pe baza experienţei anterioare sau a unor game admisibile.

În al doilea rând, obiectivele propuse trebuie asigurate cu respectarea unor condiţii inerente în practică, ce se referă la sursele disponibile de energie, la vitezele şi acceleraţiile maxime, la valorile tensiunilor şi curenţilor etc. Condiţia de cauzalitate constituie ea însăşi o restricţie. Aceste restricţii, numite uneori condiţii de realizabilitate, se exprimă prin inegalităţi şi se includ în datele iniţiale de proiectare.

În afară de problemele întâlnite la sistemele continue, în cazul proiectării sistemelor discrete apar şi unele particularităţi ca: alegerea tipului de extrapolator, alegerea perioadei de eşantionare, alegerea filtrului "antialiasing", existenţa unor metode de proiectare specifice sistemelor discrete.

Cursul se referă numai la sistemele de control *deterministe* ce sunt proiectate pentru perturbaţii externe deterministe sau condiţii iniţiale deterministe. Perturbaţiile externe si condiţiile iniţiale deterministe sunt variabile care, spre deosebire de variabilele stochastice, pot fi descrise exact în forma analitică.

7.2. Modele matematice ale proceselor discrete

Deoarece scopul este de a obține algoritmi bine acordați, este necesară cunoașterea modelelor matematice ale proceselor. Pentru început se va proceda la o clasificare a principalelor tipuri de procese tehnice.

Procesele tehnice sunt caracterizate de transformarea și/sau transportul materialelor, energiei și/sau informației (DIN 66201). Acestea pot fi clasificate în funcție de tipul semnalelor, de modul în care are loc transferul materialelor, energiei și/sau informației și în funcție de clasa modelelor matematice ce se obțin.

După cel de-al doilea criteriu de clasificare, se pot distinge următoarele clase de procese:

-procese continue - fluxuri continue de materiale, energie, informație (de exemplu, procesele din instalațiile energetice, din industria siderurgică și industria chimică);

- procese batch - materialele, energia și informația circulă în "pachete" sau fluxuri întrerupte (acestea sunt procese ce operează într-un spațiu închis ca de exemplu procesele chimice cu reacție, procesele de spălare, uscare, concasare, vulcanizare);

- procese cu evenimente discrete - materialele energia și informația sunt furnizate sub formă de eșantioane (de exemplu, unele procese din domeniul tehnologiilor de fabricație, transportul în loturi și stocarea).

În cazul de față, algoritmii de control sunt tratați cu referire în special la procesele continue sau batch. Deoarece pentru controlul numeric al proceselor este necesar un model matematic, în continuare sunt prezentate câteva metode de a obține aceste modele.

Comportarea dinamică a unui sistem dinamic liniar continuu invariant în timp având mărimea de intrare u(t) și mărimea de ieșire y(t) este descrisă de o ecuație diferențială ordinară:

$$a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \ldots + a_1 \dot{y}(t) + y(t) = \tag{7.1}$$
$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t).$$

Se presupune că aceasta a fost obținută prin analiză teoretică (modelare) pornind de la ecuații de bilanț, ecuații de stare și legi fenomenologice. Aplicând transformata Laplace se obține funcția de transfer:

$$G(s) \stackrel{\circ}{=} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{1 + a_1 s + \ldots + a_{m-1} s^{m-1} + a_m s^m} = \frac{B(s)}{A(s)}. \tag{7.2}$$

Pentru perioadele mici de eşantionare ecuaţia cu diferenţe se poate obţine prin discretizarea ecuaţiei diferenţiale aproximând ecuaţia diferenţială de ordinul 1 cu o diferenţă de ordinul 1:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t}; \quad \Delta x(k) = x(k) - x(k-1)$$

$$\frac{d^2x}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t-\Delta t)}{dt}}{\Delta t}; \tag{7.3}$$

$$\Delta^2 x(k) = \Delta x(k) - \Delta x(k-1) = x(k) - 2x(k-1) + x(k-2).$$

Exemplul 7.1

Să se discretizeze ecuaţia diferenţială:

$$a_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = b_0 w(t).$$

Aplicând (7.3) se obţine:

$$a_0 x(k) + a_1 x(k-1) = b_0 w(k) \text{ cu } a_0 = \frac{a_1}{T} + 1, \; a_1 = -\frac{a_1}{T}, \; b_0 = b_0.$$

Pentru perioade de eşantionare mari ecuaţia cu diferenţe şi funcţia de transfer în z se calculează mai bine cu ajutorul tabelelor de transformate z. Pentru acestea, fie funcţia răspuns la impuls g(t) în formă analitică, fie funcţia de transfer G(s) sunt descompuse în fracţii simple. Corespondenţa dintre aceste funcţii elementare şi funcţiile de transfer în z se obţine cu ajutorul tabelelor de transformate. Dacă procesul este prevăzut la intrare cu extrapolator de ordin 0, trebuie avută în vedere funcţia de transfer G(s)/s, aşa cum s-a arătat în cap.5.

Fie, de exemplu, funcţia de transfer:

$$G(s) = \frac{\sum_{j=0}^{p+1} c_j s^i}{(s-s_0)^p \prod_{i=1}^{e} (s-s_e)} \tag{7.4}$$

ce poate fi descompusă în fracţii simple astfel:

$$G(s) = \sum_{q=1}^{p} \frac{A_0 q}{(s-s_0)^q} + \sum_{i=1}^{1} \frac{A_i}{s-s_i} \tag{7.5}$$

unde coeficienţii pot fi calculaţi cu teorema reziduurilor

$$A_0q = \frac{1}{(p-q)!}\frac{d^{p-q}}{ds^{p-q}}\left[(s-s_0)^p G(s)\right]\Big|_{s=s_0} \qquad (7.6)$$

$$A_i = \left[(s-s_i)G(s)\right]_{s=s_i}.$$

Maparea polilor în planul z poate fi făcută direct cu ajutorul relației $z = e^{sT}$.

Exemplul 7.2

Să se calculeze funcția de transfer în z a procesului:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{(1+T_1)(1+T_2s)....(1+T_ms)},\ T_1 \neq T_2 \neq ..... \neq T_m.$$

Procesul este prevăzut cu extrapolator de ordin 0.

1) Descompunerea în fracții simple a lui G(s)/s

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{k\frac{1}{T_1}\cdot\frac{1}{T_2}\cdot\cdot\frac{1}{T_m}}{s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)\cdots\left(s+\frac{1}{T_m}\right)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+\frac{1}{T_1}} + ...+ \frac{A_m}{s+\frac{1}{T_m}}$$

$$A_i = \frac{-k\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{1}{T_j}}{\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{m}\left(-\frac{1}{T_i}+\frac{1}{T_j}\right)},\quad i=\overline{1,m},\ A_0 = k.$$

2). Determinarea funcțiilor de transfer în z corespunzătoare fracțiilor simple.

Din $G(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+\frac{1}{T_1}} + ...+ \frac{A_m}{s+\frac{1}{T_m}}$ rezultă:

$$Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\} = \frac{A_0}{1-z^{-1}} + \sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{1-e^{-\frac{T_0}{T_i}}z^{-1}}.$$

3). Din (5.10) se obține:

$$EhoG(z) = (1-z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\} = .$$

$$A_0\prod_{i=1}^{m}\left(1-e^{-\frac{T_0}{T_i}}z^{-1}\right)+\sum_{i=1}^{m}(1-z^{-1})A_i\prod_{j=1,j\neq i}^{m}\left(1-e^{-\frac{T_0}{T_j}}z^{-1}\right)+$$

$$=\frac{}{\prod_{i=1}^{m}\left(1-e^{-\frac{T_0}{T_i}}z^{-1}\right)}.$$

O altă posibilitate de a calcula funcția de transfer HG(z) din G(s), ce nu face apel la tabelele de transformate z constă în aproximarea următoare, (Tustin):

$$s\approx\frac{2}{T_0}\frac{z-1}{z+1}. \tag{7.7}$$

Această aproximare se obține dacă considerăm ecuația integrală

$$y(t)=\frac{1}{T_1}\int_0^T u(t) \tag{7.8}$$

ceea ce conduce la

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{T_1 s}. \tag{7.9}$$

Dacă integrarea continuă este aproximată cu o integrală dreptunghiulară, pentru T mic, rezultă:

$$y(k)\approx\frac{T}{T_1}\sum_{i=0}^{k}u(k-1)$$

$$y(k-1)\approx\frac{T}{T_1}\sum_{i=1}^{k-1}u(k-2) \tag{7.10}$$

$$y(k)-y(k-1)\approx\frac{T}{T_1}u(k-1)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)}\cong\frac{Tz^{-1}}{T_1(1-z^{-1})}=\frac{T}{T_1(z-1)}.$$

Din (7.9) și (7.10) rezultă corespondența:

$$s\rightarrow\frac{1}{T}(z-1). \tag{7.11}$$

O aproximare mai bună se obține folosind integrala trapezoidală.

$$y(k)\approx\frac{T}{T_1}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(u(i)-u(i-1))$$

$$y(k-1) \approx \frac{T}{T_1}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}(u(i)-u(i-1))$$

$$y(k)-y(k-1) \approx \frac{T}{2T_1}[u(k)-u(k-1)] \tag{7.12}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} \approx \frac{T}{2T_1}\frac{z+1}{z-1}.$$

Deci, rezultă corespondența $s \to \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$.

Aceeaşi corespondență poate fi obținută prin descompunerea în serie a lui z $= e^{sT}$.

$$s=\frac{1}{T}\ln z \approx \frac{2}{T}\left[\frac{z-1}{z+1}+\frac{(z-1)^2}{3(z+1)^3}+.....\right] \tag{7.13}$$

după cum şi (7.11) se poate obține din:

$$z=e^{sT}=1+Ts+..... \Leftrightarrow s \approx \frac{1}{T}(z-1). \tag{7.14}$$

7.3. Metode de proiectare a sistemelor automate discrete

Acestea pot fi clasificate astfel:

a) - metode de alocare a polilor pe modele intrare-ieşire;

b) - metode de proiectare directă în domeniul timp;

c) - metode de proiectare pe modele intrare-stare-ieşire;

d) - metode derivate din legi de reglare continuă.

VIII. Proiectarea sistemelor automate discrete prin metode de alocare a polilor

Discuția va fi restrânsă la cazul sistemelor monovariabile. Notația mărimilor ce intervin în sistem va fi următoarea; mărimea de ieşire - y(k), mărimea de comandă - u(k), variabilele de stare - vectorul x(k), perturbația externă v(k), mărimea de referință r(k) şi abaterea e(k) = r(k)-y(k).

De asemenea, este tratat doar cazul sistemelor de control liniar pentru procese liniare sau liniarizabile invariante în timp.

Alegerea performanțelor impuse sistemului joacă un rol central în proiectarea regulatorului. Pentru unele controlere comportarea în timp a comenzii este specificată, fie complet, fie după un timp finit. În cazul alocării polilor se spune foarte puțin despre comportarea în timp a comenzii. În ambele cazuri, influențele zerourilor şi a perturbațiilor externe nu este inclusă în proiectare.

8.1. Cazul general

Se consideră funcția de transfer a regulatorului de forma:

$$G_R(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + ... + q_{n_Q} z^{-n_Q}}{1 + p_1 z^{-1} + ... + p_{n_p} z^{-n_p}} = \frac{U(z)}{E(z)} \qquad (8.1)$$

iar funcția de transfer a procesului de forma:

$$G_P(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + ... + a_n z^{-n}} z^{-d} = \frac{Y(z)}{U(z)} \qquad (8.2)$$

regulatorul şi procesul reglat, făcând parte dintr-o structură de reglare negativă ca în fig. 8.1.

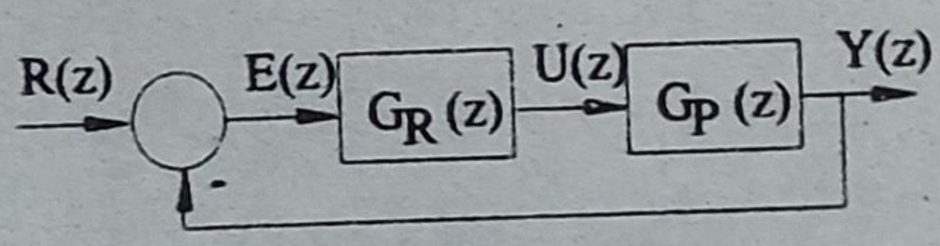


Fig. 8.1. Structura sistemului numeric de reglare automată

Funcția de transfer în buclă închisă rezultă:

$$G_0(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_R(z)G_P(z)}{1 + G_R(z)G_P(z)} = \frac{Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}}{P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}}. \qquad (8.3)$$

Aceasta din urmă mai poate fi scrisă în forma:

$$G_0(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + ... + \beta_r z^{-r}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + ... + \alpha_r z^{-1}}. \qquad (8.4)$$

Scopul proiectării este de a determina funcția de transfer a regulatorului $G_R(z)$, din care se obține ulterior legea de comandă sub forma unei ecuații cu diferențe. Modelul părții fixate se consideră cunoscut, iar $G_0(z)$ sau numai polinomul caracteristic al lui $G_0(z)$ se determină pe baza performanțelor impuse sistemului de reglare.

În cazul general, polinomul caracteristic rezultă de forma:

$$P_0(z) = (z - z_1)(z - z_2)(....(z - z_e) = 0 \qquad (8.5)$$

din ecuația caracteristică

$$P_0(z^{-1}) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + ... + \alpha_r z^{-r}. \qquad (8.6)$$

De obicei, polinomul caracteristic se impune de gradul 2 sau 1 (pentru sistemele fără suprareglare) deoarece pentru astfel de sisteme se pot stabili relații simple între performanțe (suprareglare, durata regimului tranzitoriu, timpul de supraurmărire) şi poziția polilor. Pentru sistemele de ordin mai mare decât 2 nu pot fi stabilite relații simple între performanțe şi repartiția poli-zerouri. Totuşi, în cazul continuu, dacă sistemul este caracterizat de o singură pereche de poli complex-conjugați, numiți şi dominanți, şi dacă şi ceilalți poli sunt îndepărtați (departe de axa imaginară în planul s), efectele acestora asupra regimului tranzitoriu sunt neglijabile.

Această remarcă este valabilă şi în planul z, şi anume, comportarea în regim tranzitoriu va fi determinată de polii complex conjugați dominanți, adică de polii situați în interiorul cercului de rază unitară, cei mai apropiați de acest cerc, cu rezerva ca toți ceilalți poli să fie de modul sensibil mai mic.

Impunând polinomul caracteristic dorit, prin impunerea unui răspuns dorit la semnal de referință treaptă unitară, ca fiind un polinom de ordin 2:

$$Pd_2(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \qquad (8.7)$$

rezultă polinomul dorit discret

$$Pd_2(z) = z^2 + d_1 z + d_2$$

$$d_1 = -2e^{-\xi\omega_n T}\cos(\omega_n T\sqrt{1-\xi^2}) \qquad (8.8)$$

$$d_2 = e^{-2\xi\omega_n T}.$$

Dacă dinamica dominantă poate fi dată de un element de ordinul întâi:

$$Pd_1(z) = z - d \tag{8.9}$$

$$d = e^{-T/T_0}$$

unde T_0 = constanta de timp dorită.

Elementul de ordinul întâi poate fi folosit împreună cu elementul de ordinul doi dacă nu este îndeplinită condiția de realizabilitate sau dacă trebuie satisfăcute performanțe suplimentare.

În cazul general, polinomul caracteristic va fi de forma:

$$Pd(z) = Pd_2(z)\prod_{i=3}^{r} Pd_1(z) \tag{8.10}$$

sau

$$Pd(z) = (z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)\prod_{i=3}^{r}(z - \alpha_i) \tag{8.11}$$

și poate fi pus în forma echivalentă (8.6).

Determinarea parametrilor regulatorului se face calculând polinomul caracteristic al sistemului numeric de reglare automată și identificând coeficienții cu cei ai polinomului (8.6).

Din (8.3) rezultă:

$$G_0(z) = \frac{Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}}{P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}}$$

și de aici se deduce polinomul caracteristic:

$$P_0(z^{-1}) = P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d} =$$

$$= (1 + p_1 z^{-1} + \ldots + p_{n_p} z^{-n_p})(1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}) + \tag{8.12}$$

$$+ (q_0 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_{n_Q} z^{-n_Q})(b_1 z^{-1} + \ldots b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n})z^{-d}$$

cu gradul

$$n_{P_d} = \ell = \max(n_p + n, n_Q + n + d). \tag{8.13}$$

unde n este gradul polinoamelor A și B din (8.2), n_Q este gradul polinomului Q din (8.1), iar n_p este gradul polinomului N din (8.1).

Eroarea staționară nulă de poziție impune $G_0(1) = 1$, așa cum rezultă din teorema valorii finale aplicate lui $Y(z) = R(z)G_0(z)$, $R(z) = z/(z-1)$, de unde rezultă: (8.14)

$$P(1)A(1) = 0$$

care este îndeplinită pentru:

$$\sum_{i=1}^{n_p} p_i = -1. \tag{8.15}$$

Deoarece (8.12) conduce la $\ell+1$ ecuații, obținerea unei soluții unice pentru cei n_p+n_Q+1 parametri ai regulatorului impune egalitatea:

$$\ell+1 = n_P + n_Q + 1 \tag{8.16}$$

Pot apare următoarele două cazuri:

a) $n_p \geq n_Q + d \Rightarrow \ell = n_p + n$

din (8.13) $\Rightarrow n_Q = n$ şi deci $n_p > n+d$.

b) $n_p \leq n_Q + d \Rightarrow \ell = n_Q + n + d$

din (8.13) $\Rightarrow n_p = n+d$ şi deci $n_Q \geq d$.

Dacă se aleg cele mai mici grade pentru polinoamele regulatorului se obține:

$$n_Q = n, \quad n_p = n + d. \tag{8.17}$$

În acest caz, determinarea parametrilor de acord implică rezolvarea ecuației diofantice:

$$P_0(z^{-1}) = P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}, \; l = 2n+d. \tag{8.18}$$

Relația (8.18) împreună cu (8.15) poate fi pusă în forma matriceală:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & b_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 & b_2 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & 0 & \vdots \\ \hline & & & & & a_1 \\ & & & & & a_2 \\ & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & & & a_n & 0 \\ \hline 1 & 1 & & & 1 & 0 \end{array}\right. \left.\begin{array}{c} 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \\ b_1 \quad 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_n \; b_{n-1} \cdots 0 \\ 0 \quad b_n \cdots b_1 \\ 0 \quad 0 \cdots b_n \\ \hline 0 \cdots 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} p_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ p_{n+d} \\ q_0 \\ \\ q_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \alpha_1 - a_1 \\ \\ \\ \\ \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n+1} \\ \\ \\ \alpha_{2n+d} \\ -1 \end{array}\right] \tag{8.19}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n+1}$ R $\underbrace{\qquad}_{n+d}$ θ_R α

Cu notaţiile din (8.19), dacă matricea R este nesingulară, vectorul parametrilor regulatorului se obţin cu relaţia:

$$\theta_R = R^{-1}d. \tag{8.20}$$

Datorită condiţiei (8.17) se observă că zerourile procesului vor apare în funcţia de transfer a buclei închise $G_0(z)$, ceea ce înseamnă că însuşi procesul dictează unele din zerourile funcţiei de transfer în buclă închisă, fapt ce poate influenţa performanţele impuse prin alocare.

Pentru a elimina acest dezavantaj, atunci când procesul are zerouri, se recomandă o metodă de alocare a polilor şi zerourilor funcţiei de transfer.

8.2 Sinteza sistemelor discrete prin alocare poli-zerouri

Această metodă porneşte de la alocarea poli-zerouri pentru un sistem de ordinul doi cu doi poli complex-conjugaţi şi un zero real.

$$G_0(z) = \frac{k(z - z_1)}{(z - z_{p1})(z - z_{p2})} \tag{8.21}$$

deoarece un sistem de ordinul 2 continuu cu eşantionor pe calea directă, urmat de extrapolator şi prevăzut cu reacţie unitară conduce, prin discretizare, la o funcţie de transfer în z de acest tip.

Impunând condiţia de eroare staţionară nulă pentru un semnal de intrare de tip treaptă unitară rezultă:

$$Y(z) = R(z)G_0(z); \quad R(z) = \frac{z}{z-1} \tag{8.22}$$

şi aplicând teorema valorii finale

$$\lim_{n\to\infty} y(nT) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{z}{z-1}\frac{k(z - z_1)}{(z - z_{p1})(z - z_{p2})} = 1 \tag{8.23}$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{(1 - z_{p1})(1 - z_{p2})}{(1 - z_1)}. \tag{8.24}$$

Pentru semnal de intrare treaptă unitară, R(z)=z/(z-1), răspunsul sistemului este dat de:

$$Y(z) = \frac{kz(z - z_1)}{(z - z_{p1})(z - z_{p2})}. \tag{8.25}$$

Răspunsul în domeniul timpului se obține cu ajutorul formulei de inversiune:

$$y(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\frac{kz(z-z_1)}{(z-1)(z-z_{p_1})(z-z_{p_2})}z^{n-1}dz. \qquad (8.26)$$

unde Γ este un contur închis ce cuprinde toate singularitățile funcției de sub integrală.

Aplicăm teorema reziduurilor:

$$y(nT)=1+2\left|\frac{k(z_{p_1}-z_1)}{(z_{p_1}-1)(z_{p_1}-z_{p_2})}\right||z_{p_1}|^n\cos(n\phi_1+\theta_1)$$

$$\theta_1=\arg(z_{p_1}-z_1)-\arg(z_{p_1}-1)-\frac{\pi}{2} \qquad (8.27)$$

$$\phi_1=\arg p_1.$$

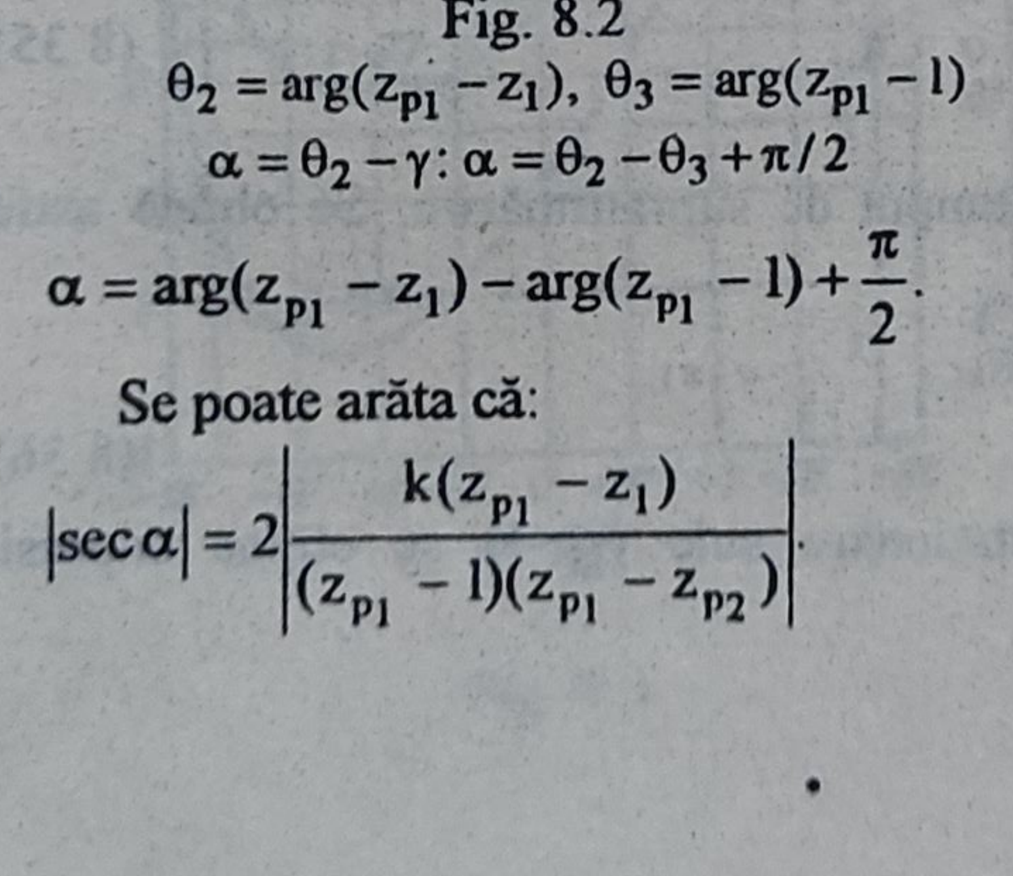


Fig. 8.2

$\theta_2=\arg(z_{p_1}-z_1)$, $\theta_3=\arg(z_{p_1}-1)$

$\alpha=\theta_2-\gamma$: $\alpha=\theta_2-\theta_3+\pi/2$

Performanțele de regim tranzitoriu ce se impun sistemului proiectat se referă la valoarea suprareglării ($\sigma\leq\sigma_{imp}$) și a duratei regimului tranzitoriu ($t_t\leq t_{t\ imp}$). Prin metodă σ și t_t sunt calculate considerând poli complex conjugați și un zero real ce poate fi plasat oriunde pe axa reală. Pentru (8.27) se definește unghiul α, dat de poziția relativă a zeroului z_1 în raport cu polul z_{p1} prin relația:

$$\alpha=\arg(z_{p_1}-z_1)-\arg(z_{p_1}-1)+\frac{\pi}{2}. \qquad (8.28)$$

Se poate arăta că:

$$|\sec\alpha|=2\left|\frac{k(z_{p_1}-z_1)}{(z_{p_1}-1)(z_{p_1}-z_{p_2})}\right|. \qquad (8.29)$$

Proiectarea se bazează pe ipoteza că există o funcţie continuă y(t), care în momentele de eşantionare trece prin valorile y(kT) ale răspunsului discret cu funcţia (8.21) pentru un semnal treaptă unitară discretă.

Substituind (8.29) în (8.27) rezultă:

$$y(nT) = 1 + |\sec\alpha| |z_{p1}|^n \cos(n\phi_1 + a - \pi). \tag{8.30}$$

Relaţia de definiţie $z = e^{sT}$ stabileşte corespondenţa dintre polii sistemului continuu de ordinul doi şi polii funcţiei $G_0(z)$.

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \tag{8.31}$$

$$z_{p1,p2} = e^{-\xi\omega_n T} . e^{\pm j\omega_n T\sqrt{1-\xi^2}} \tag{8.32}$$

cu $|z_{p1}| = e^{-\xi\omega_n T}$ şi $\arg z_{p1} = \omega_n T\sqrt{1-\xi^2} = \phi_1$.

Înlocuind în (8.30) se obţine:

$$y(nT) = 1 + |\sec\alpha| e^{-\xi\omega_n nT} \cos(\omega_n nT\sqrt{1-\xi^2} + \alpha - \pi). \tag{8.33}$$

Din faptul că valorile y(nT) coincid cu valorile funcţiei continue y(t) în momentele de eşantionare Y(t) rezultă $t = kT$ şi, deci,

$$Y(t) = 1 + |\sec\alpha| e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n t\sqrt{1-\xi^2} + \alpha - \pi). \tag{8.34}$$

Adoptând o perioadă de eşantionare corect aleasă, suprareglarea Γ obţinută cu funcţia continuă poate fi considerată ca fiind, cu aproximaţie, suprareglarea sistemului discret cu funcţia de transfer (8.21).

Suprareglarea se poate calcula din $dy(t) / dt = 0$ şi substituind apoi prima valoare a t obţinut din această relaţie în (8.34).

$$t_s = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{arctg}\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - \alpha + \pi\right) \tag{8.35}$$

Timpul t_s obţinut anterior este timpul de supraurmărire. Se obţine astfel valoarea maximă a răspunsului

$$y_{max} = 1 + \sqrt{1-\xi^2}\,|\sec\alpha| e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} - \alpha + \pi\right)} \tag{8.36}$$

şi ţinând cont de existenţa erorii staţionare nule ($y_{st}=1$) se obţine expresia suprareglării.

$$\sigma = \sqrt{1-\xi^2}\,|\sec\alpha|\,e^{\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\alpha+\pi\right)} \tag{8.37}$$

depinzând de ξ şi α. Pentru diferite valori ξ = constant, dependenţa dintre σ şi α este prezentată sub formă grafică în figura 8.3. Din figură se constată că o valoare impusă σ_{imp} poate fi obţinută cu o multitudine de perechi (ξ , α), ceea ce oferă posibilitatea de optimizare a răspunsului sistemului pentru satisfacerea unui criteriu suplimentar de comportare a sistemului proiectat.

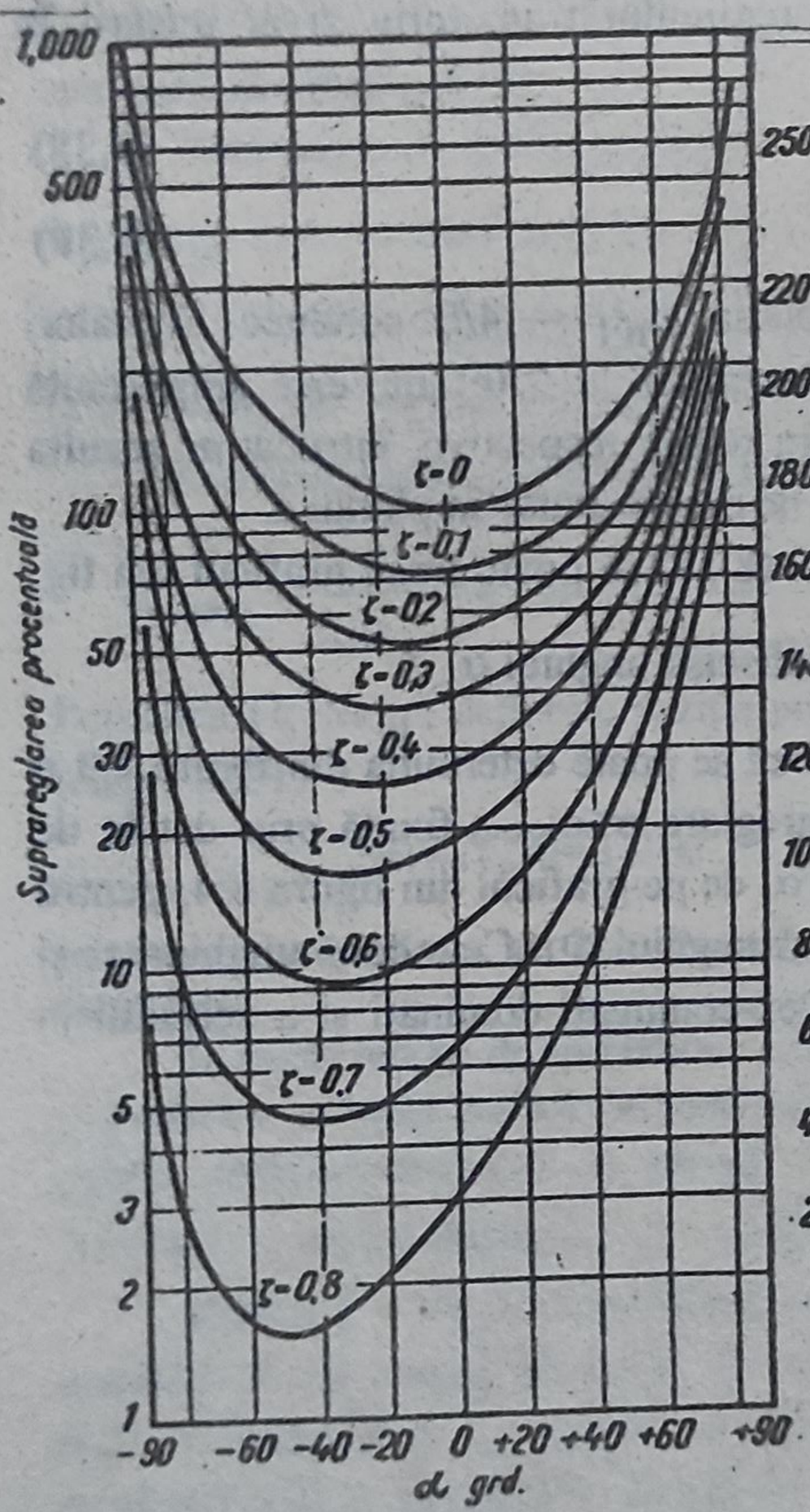


Fig. 8.3

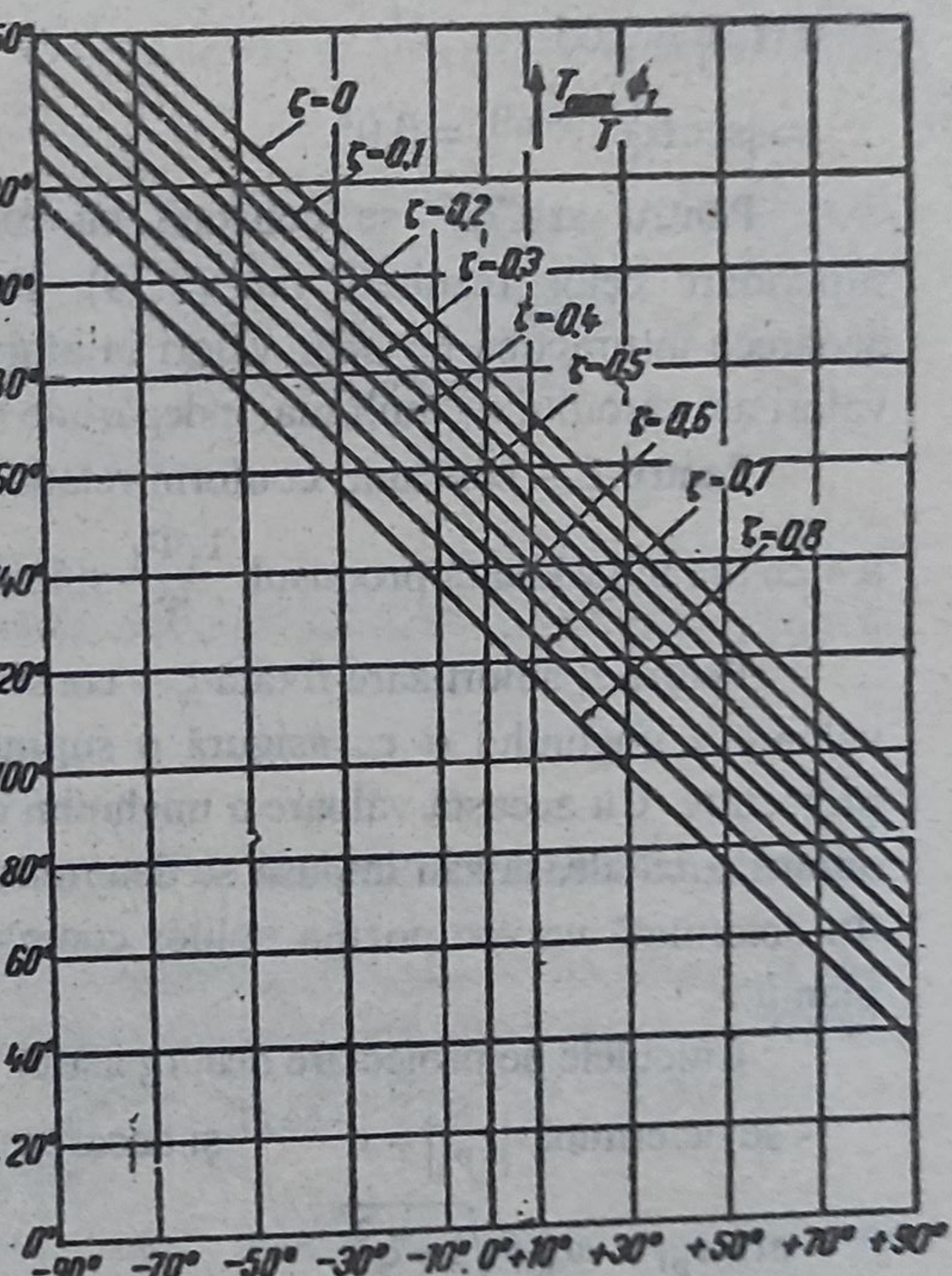


Fig. 8.4

La sistemele continue de ordinul 2, durata regimului tranzitoriu poate fi expfimată printr-o aproximație acoperitoare:

$$t_t \approx \frac{4}{\xi\omega_n} \tag{8.38}$$

Se poate arăta că relația (8.37) rămâne valabilă şi pentru sistemele discrete de ordinul 2. Din (8.34) rezultă:

$$\varepsilon(t) = r(t) - y(t) = 1 - y(t) = -|\sec\alpha| e^{-\xi\omega_n t} \cos\left(\omega_n t\sqrt{1-\xi^2} + \alpha - \pi\right).$$

Întrucât momentul t_t al încheierii regimului tranzitoriu şi al intrării în regimul staționar corespunde condiției:

$$|\varepsilon(t_t)| = 0{,}05 \tag{8.38}$$

$$\Rightarrow |\sec\alpha| e^{-\xi\omega_n t_t} = 0{,}05. \tag{8.39}$$

Pentru $|\alpha| \le 70^o$ se constată că relația $\omega_n t_t = 4/\xi$ conduce la valori superioare celor rezultate din (8.39). Restricția $|\alpha| \le 70^o$ nu este importantă deoarece în practică nu apar valori în afara gamei respective, întrucât ar rezulta valori ale zeroului z_1 mult mai îndepărtate de cercul unitar în planul z.

Pentru ξ = constant, conform relației (8.35) se poate trasa graficul din fig. 8.4 ce are în ordonată produsul $\frac{t_s\Phi_1}{T}$ şi în abscisă unghiul α.

Pentru o amortizare fixată ξ = constant se poate determina din figura 8.3 o valoare a unghiului α ce asigură o suprareglare $\sigma \le \sigma_{impus}$ fixată prin datele de proiectare. Cu această valoare a unghiului α, de pe graficul din figura 8.4, pentru amortizarea aleasă sau impusă se determină unghiul Φ_1. Cele două unghiuri α şi Φ_1 determină univoc poziția polilor complex-conjugați dominați şi a zeroului în planul z.

Calculele de proiectare decurg astfel:

- se determină $|z_{p1}| = e^{-\xi\omega_n T}$ şi deoarece

$$\arg z_{p1} = \omega_n T\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\Rightarrow \omega_n T = \frac{\Phi_1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

se deduce că $|z_{p1}| = e^{-\Phi_1 \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\Phi_1 tg(\arcsin\xi)}$

- se plasează z_{p1} si z_{p2} în planul z;

- se determină poziția zeroului z_1 dispunând de unghiul α și poziția polilor complex-conjugați, prin rezolvarea problemei de geometrie plană ce apare (a se vedea fig.8.2).

O altă metodologie de proiectare puțin diferită de cea prezentată se bazează pe aceleași relații determinate anterior, cu deosebirea că prin datele de proiectare se impune, de această dată, durata regimului tranzitoriu și nu valoarea timpului de supraurmărire t_s. O valoare acoperitoare pentru durata regimului tranzitoriu este dată de relația (8.38).

Transpunerea performanțelor $\sigma \le \sigma_{impus}$ si $t_t \le t_{t\,impus}$ în alocarea polilor z_{p1} si z_{p2} și a zeroului z_1 se face astfel:

- cu valoarea σ_{impus} și cu o valoare a amortizării $\xi \le \xi_{impus}$ se determină două valori ale unghiului α din graficul 8.3. Se alege o pereche (ξ_1, α).

- cu valoarea impusă pentru t_t ,din relația (8.38) se determină

$$t_{t\,impus} = \frac{4}{\xi_1 \omega_{n1}} \Rightarrow \quad \omega_{n1} = \frac{4}{\xi_1 t_{t\,impus}}.$$

Perechea (ξ_1, ω_{n1}) definește poziția polilor complex-conjugați în planul s. Conform relației (8.31)

$$z_{p1}, z_{p2} = e^{-\xi_1 \omega_{n1} T} e^{\pm j\omega_{n1}\sqrt{1-\xi_1^2}}$$

relație pe baza căreia se pot determina modulul și argumentele polilor complex-conjugați.

În unele lucrări de specialitate este prezentată această metodă de proiectare, dar se preferă o variantă grafică, pe baza unei diagrame ce prezintă locurile geometrice ale polilor complex-conjugați în planul z pentru diferite valori ale amortizării, ξ = constant, și ale produsului $\omega_n T$ = constant.

Pentru ξ = constant și diferite valori $\omega_n T$, relația (8.31) conduce la locurile geometrice ale polilor în cercul de rază unitară pentru ξ = constant, iar pentru $\omega_n T$ = constant și ξ variabil se obțin locurile geometrice ale polilor pentru produsul $\omega_n T$ = constant în cercul de rază unitară.. Determinarea poziției polilor se poate face, cu aproximație, pe baza acestei diagrame ce conține cele două locuri geometrice. Dispunând de unghiul α, determinat din fig.8.3 și de poziția polilor complex-conjugați, se calculează valoarea zeroului ca și în cazul prezentat anterior.

După determinarea poziției zeroului și a polilor complex conjugați, se determină k cu ajutorul relației (8.24). Cu aceasta, performanțele de comportabilitate sunt satisfăcute și se verifică condiția de realizabilitate; excesul poli-zerouri ale lui $G_0(z)$ trebuie să fie mai mare sau egal cu excesul poli zerouri ale funcției de transfer a procesului. Dacă funcția de transfer $G_0(z)$ nu îndeplinește această condiție se adaugă poli suplimentari astfel plasați în planul z încât să nu influențeze performanțele determinate de polii dominanți z_{p1} și z_{p2}. Acești poli suplimentari vor fi plasați în apropierea originii planului z sau chiar în origine.

Procedura de proiectare a algoritmului de reglare numerică pe baza alocării polilor și zerourilor funcției de transfer $G_0(z)$ presupune parcurgerea următoarelor etape:

1. Se construiește $G_0(z)$ de forma (8.21), pe baza unor criterii locale de performanță și se testează încadrarea răspunsului obținut în aceste criterii. Dacă unele din condițiile de proiectare nu sunt satisfăcute se introduc poli și zerouri până când sunt îndeplinite toate condițiile de proiectare.

2. Se verifică condiția de realizabilitate fizică și, dacă aceasta nu este îndeplinită, se introduc poli suplimentari, verificându-se și dacă aceștia nu influențează performanțele impuse prin condițiile de proiectare.

3. Se calculează funcția de transfer a regulatorului $G_R(z)$ astfel:

$$G_0(z)=\frac{G_p(z)G_R(z)}{1+G_p(z)G_R(z)}\Rightarrow G_R(z)=\frac{1}{G_p(z)}\frac{G_0(z)}{1-G_0(z)}. \qquad (8.40)$$

Exemplul 8.1

Partea fixată a sistemului este descrisă de funcția de transfer $G_p(z)=\frac{1}{s(s+1)}$. Perioada de eșantionare este 0,1s.

Să se proiecteze un regulator numeric astfel încât sistemul în buclă închisă cu reacție negativă unitară să satisfacă următoarele prescripții:

a) eroare staționară nulă;

b) $t_s\leq 0{,}3s$;

c) $\sigma\leq 10\%$;

d) $\xi\geq 0{,}707$.

Alegerea regulatorului $G_R(z)$ impune parcurgerea următoarelor etape:

1) Funcția de transfer în z a părții fixate, incluzând extrapolatorul de ordin 0 rezultă:

$$G_p(z)=(1-z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}\right\}=\frac{0{,}005(z-0{,}9)}{(z-1)(z-0{,}905)}.$$

2) Deoarece zeroul lui $G_p(z)$ se găseşte în interiorul cercului de rază unitară, nu este necesară compensarea acestuia şi zeroul z_1 al regulatorului poate fi plasat oriunde pe axa reală.

3) Pentru $\xi = 0{,}707$ şi $\sigma=10\%$, unghiul α, conform fig.8.3, $-80^o \le \alpha \le 18^o$.

4) Pentru α situat la extremităţile intervalului şi $t_s = 0{,}3s$ se determină unghiul ϕ, utilizând ecuaţia:

$$\text{Pt. } \alpha = -80^\circ \ \frac{t_s\phi}{T}=215^\circ \ \phi \ge 71^\circ$$

$$\text{Pt. } \alpha = 18^\circ \ \frac{t_s\phi}{T}=120^\circ \ \phi \ge 40^\circ.$$

5) Alegând $\alpha = 0^o$ din ecuaţia (8.38) $\Rightarrow \frac{t_s\phi}{T}=135^\circ$. Pentru $t_s \le 0{,}3$ rezultă $\phi \ge 45^o$. Se adoptă $\phi = 50^o$ şi se determină:

$$|z_{p1}| = e^{\frac{-\phi[rad]\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} = 0{,}42.$$

Pentru $\phi = 50^o$, $\alpha = 0^o$ şi $|z_{p1}| = 0{,}42$ se găseşte $z_1 = 0{,}0737$.

Se determină :

$$k=\frac{(1-z_{p1})(1-z_{p2})}{(1-z_1)}=0{,}688.$$

Funcţia de transfer în buclă închisă a sistemului sintetizat este:

$$G_0(z)=\frac{0{,}688(z-0{,}0737)}{z^2-0{,}54z+0{,}178}.$$

6) Se determină funcţia de transfer a regulatorului numeric:

$$G_R(z)=\frac{G_0(z)}{1-G_0(z)}\frac{1}{G_p(z)}=\frac{0{,}688(z-0{,}0737)}{(z-1)(z-0{,}23)}\frac{1}{G_p(z)}=$$

$$=\frac{138(z-0{,}0737)(z-0{,}905)}{(z-0{,}23)(z-0{,}9)}.$$

7) Verificarea proiectării. Pentru

$$R(z)=\frac{z}{z-1}\Rightarrow Y(z)=G_0(z)R(z)$$

Se calculează valorile ieşirii sistemului în momentele de eşantionare prin transformată inversă z cu ajutorul formulei de inversiune sau prin împărţirea nelimitată a numărătorului la numitor.

$$Y(z) = G_0(z)R(z) = 0{,}688z^{-1} + 1{,}009z^{-2} + 1{,}058z^{-3} +$$
$$+ 1{,}027z^{-4} + z^{-5} + 0{,}99z^{-6} + \ldots.$$

Se poate observa pe răspunsul obţinut îndeplinirea condiţiilor de proiectare cu privire la valoarea suprareglării (9%) şi a valorii timpului de supraurmărire ($3T = 0{,}3s$).

IX. Proiectarea directă în domeniul timp a sistemelor discrete

Metoda se bazează pe impunerea unei durate a regimului tranzitoriu finită atât pentru ieşirea procesului cât şi a mărimii de comandă. Această comportare a fost numită de către Jury "deabeat response". La aplicarea unei modificări treaptă a referinţei sistemului de reglare, mărimile de intrare şi de ieşire ale procesului ajung într-un regim staţionar după un timp finit.

Metodele de proiectare din această categorie au avantajul că necesită relativ puţine calcule pentru sinteza regulatorului.

9.1. Metoda timpului finit

Se consideră sistemul de reglare din fig.8.1 cu reacţie negativă unitară, funcţia de transfer discretă a procesului fiind dată de relaţia (8.1) şi considerată cunoscută, având ordinul m. De asemenea, se consideră că procesul este fără timp mort (d = 0).

La momentul k = 0, se consideră o modificare treaptă unitară a referinţei

$$r(k) = 1 \quad k = 0,1,2,.... \tag{9.1}$$

Se impune ca, după m perioade de eşantionare, sistemul să se afle într-un regim staţionar.

$$y(k) = r(k) = 1$$
$$u(k) = u(m) \qquad \text{pentru } k \geq m \tag{9.2}$$

Comportarea sistemului în regim tranzitoriu este stabilită de către proiectant prin valorile impuse ieşirii sistemului în momentele de eşantionare y(kT), k < m, pe baza performanţelor de regim tranzitoriu specificate prin problema de proiectare (σ,ξ,t_t). Astfel este complet determinat răspunsul sistemului în domeniul timpului (y(k), k ≥ 0).

Rezultă:

$$Y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + ... + y(m-1)z^{-m-1} + ... \tag{9.3}$$

$$R(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} \tag{9.4}$$

$$U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + ... + u(m-1)z^{-m+1} + u(m)z^{-m} + u(m)z^{-m-1} + ... \tag{9.5}$$

Dispunând de R(z) şi Y(z) se poate determina:

$$G_0(z^{-1}) = \frac{Y(z)}{R(z)} = (1 - z^{-1}) \sum_{k=1}^{\infty} y(k) z^{-k} = P(z). \tag{9.6}$$

De asemenea:

$$\frac{U(z)}{R(z)} = (1 - z^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} = Q(z). \tag{9.7}$$

Ținând cont că:

$$Y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \ldots + y(m-1)z^{-m+1} + z^{-m}\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right) \tag{9.8}$$

și $$U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + \ldots + u(m-1)z^{-m+1} + u(m)z^{-m}\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right) \tag{9.9}$$

rezultă:

$$G_0(z^{-1}) = y(1)z^{-1} + (y(2) - y(1))z^{-2} + \ldots + (1 - y(m-1))z^{-m} \tag{9.10}$$

sau

$$G_0(z^{-1}) = P(z^{-1}) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_m z^{-m}$$

unde:

$$\begin{aligned} p_1 &= y(1) \\ p_2 &= y(2) - y(1) \\ &\vdots \\ p_m &= 1 - y(m-1) \end{aligned} \tag{9.11}$$

și $$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \tag{9.12}$$

$$\Rightarrow G_0(z) = \frac{p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \ldots + p_m}{z^m}. \tag{9.13}$$

Ecuația caracteristică este $z^m = 0$, adică sistemul în buclă deschisă va avea m poli, toți situați în originea planului z.

Deoarece

$$G_0(z) = \frac{G_p(z) G_R(z)}{1 + G_p(z) G_R(z)},$$

se poate determina funcția de transfer a regulatorului

$$G_R(z) = \frac{1}{G_p(z)} \frac{G_0(z)}{1 - G_0(z)}. \tag{9.14}$$

Pe de altă parte din (9.6) și (9.7) rezultă:

$$G_p(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{P(z)}{Q(z)} \tag{9.15}$$

și atunci funcția de transfer a regulatorului poate fi rescrisă astfel:

$$G_R(z)=\frac{Q(z)}{1-P(z)}=\frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}+\ldots.+q_mz^{-m}}{1-p_1z^{-1}-p_2z^{-2}-\ldots.-p_mz^{m}} \tag{9.16}$$

unde coeficienții $q_0 \div q_m$ pot fi calculați cu ușurință din (9.7):

$$\begin{aligned} q_0&=u(0)\\ q_1&=u(1)-u(0)\\ &\vdots\\ q_m&=u(m)-u(m-1). \end{aligned} \tag{9.17}$$

Parametrii regulatorului q_i, $i=\overline{0,m}$, p_i, $i=\overline{1,m}$ pot fi determinați comod dacă se ține cont de faptul că:

$$G_p(z)=\frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots.+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots.+a_mz^{-m}}=\frac{p_1z^{-1}+p_2z^{-2}+\ldots.+p_mz^{-m}}{q_0+q_1z^{-1}+\ldots.+q_mz^{-m}} \tag{9.18}$$

$$\begin{aligned} q_1&=a_1q_0 & p_1&=b_1q_0\\ q_2&=a_2q_0 & p_2&=b_2q_0\\ &\vdots & &\vdots\\ q_m&=a_mq_0 & p_m&=b_mq_0. \end{aligned} \tag{9.19}$$

iar q_0 care este și valoarea inițială a comenzii u(0) se obține din (9.12)

$$\sum_{i=1}^{m}p_i=\sum_{i=1}^{m}b_iq_0=1\Rightarrow q_0=\frac{1}{b_1+b_2+\ldots+b_m}. \tag{9.20}$$

Funcția de transfer a regulatorului poate fi deci calculată într-un mod foarte simplu. Cu relațiile (9.19) rezultă:

$$\begin{aligned} P(z)&=q_0B(z)\\ Q(z)&=q_0A(z) \end{aligned} \tag{9.21}$$

iar funcția de transfer a regulatorului mai poate fi pusă în forma:

$$G_R(z)=\frac{q_0A(z)}{1-q_0B(z)}. \tag{9.22}$$

La implementarea algoritmului "dead beat" trebuie ținut cont de faptul că valoarea inițială a comenzii depinde de suma coeficienților b_i ai procesului. Acest fapt poate conduce la saturarea regulatorului în cazul în care rezultă sume mici ale coeficienților. Singura posibilitate de a modifica valoarea inițială a comenzii este de a alege o altă perioadă de eșantionare. Creșterea perioadei de eșantionare

conduce la creşterea sumei coeficienţilor şi, deci, la scăderea valorii iniţiale a comenzii u(0).

Rezultă că alegerea unei perioade de eşantionare optime este esenţială pentru obţinerea unui algoritm de reglare implementabil. Pentru alegerea perioadei de eşantionare este recomandată relaţia:

$$\frac{T}{T_\Sigma} \geq 0{,}36 \quad \frac{T}{T_{95\%}} \geq 0{,}18 \tag{9.23}$$

unde: T_Σ = suma constantelor de timp ale procesului
$T_{95\%}$ = timpul de ridicare.

Exemplul 9.1

Se consideră sistemul descris prin funcţia de transfer

$$G(s) = \frac{K(1+T_4 s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)},$$

având valorile parametrilor: K=1, $T_1 = 10s$, $T_2 = 7s$, $T_3 = 3s$, $T_4 = 4s$.

Pentru o perioadă de eşantionare $T_0 = 4s$, cu ajutorul relaţiilor (9.19) şi (9.20) se obţin coeficienţii regulatorului deadbeat:

$q_0 = 9{,}523$; $q_1 = -14{,}285$; $q_2 = 6{,}714$; $q_3 = -0{,}952$;
$p_1 = 0$; $p_2 = 0{,}619$; $p_3 = 0{,}457$; $p_4 = -0{,}0762$.

9.2. Metoda timpului minim

Metoda îşi propune proiectarea unui sistem automat discret cu timp de stabilire minim şi eroare staţionară nulă în momentele de eşantionare pentru un semnal de referinţă în formă de treaptă, rampă sau parabolă. Referindu-ne la sistemul cu configuraţia din fig.8.1., se poate proiecta un regulator $G_R(z)$ fizic realizabil care să satisfacă următoarele criterii de proiectare:

1) eroare staţionară nulă pentru semnalul de referinţă prescris;
2) durata regimului tranzitoriu să fie minimă;
3) regulatorul să fie fizic realizabil.

Un răspuns care satisface aceste condiţii se numeşte răspuns "minimal".

Se va arăta că pentru a deţine eroare stationară nulă în răspunsul sistemului în buclă închisă la semnale de probă de forma $r(t) = t^m$, trebuie să se impună anumite condiţii funcţiei $1 - G_0(z)$.

Transformata z a erorii este:

$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z)(1 - G_0(z)).$$

Aplicând teorema valorii finale ultimei ecuații rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} e(nT) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})R(z)(1 - G_0(z)). \tag{9.24}$$

Impunând condiția de eroare staționară nulă din (9.24) rezultă:

$$\lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})R(z)(1 - G_0(z)) = 0.$$

Pentru mărimi de intrare de tipul considerat ($r(t)=t^n$) se observă că transformatele z ale acestora sunt de forma:

$$R(z) = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^n} \tag{9.25}$$

unde $n = m + 1$ iar $A(z)$ sunt polinoame în z^{-1} fără zerouri la $z = 1$.

$$\lim_{n\to\infty} e(nT) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^n}(1 - G_0(z)) = 0. \tag{9.26}$$

Deoarece $A(z)$ nu are zerouri la $z = 1$, condiția necesară pentru ca eroarea staționară să fie nulă în ecuația (9.26) este ca $1 - G_0(z)$ să conțină la numărător factorul $(1-z^{-1})^n$. Deci $1-G_0(z)$ trebuie să fie de forma:

$$1 - G_0(z) = (1 - z^{-1})^n F(z) \tag{9.27}$$

unde $F(z)$ este un polinom (ce urmează a fi ales) fără zerouri la $z = 1$. Funcția de transfer $G_0(z)$ se obține din (9.27)

$$G_0(z) = \frac{z^n - (z - 1)^n F(z)}{z^n}. \tag{9.28}$$

Ecuația caracteristică a sistemului cu eroare staționară nulă este de forma:

$$z^p = 0,\ p \geq n \tag{9.29}$$

Prin urmare, pentru ca eroarea staționară să se anuleze în domeniul unui interval de timp finit, când semnalul de intrare este de forma t^m, ecuația caracteristică a sistemului este de forma (9.29), răspunsul sistemului fiind de tipul "dead beat".

Limitările impuse lui $D(z)$ prin posibilitățile de realizare fizică, restrâng, alegerea funcției $G_0(z)$ a sistemului în buclă închisă.

Dacă condiția ca excesul poli-zerouri al lui $G_0(z)$ să fie mai mare sau egal decât excesul poli-zerouri al procesului ($G_p(z)$) se apelează la polinomul $F(z)$

În general, se poate demonstra că dacă $G_p(z)$ are o întârziere sau zerouri pe sau în interiorul cercului de rază unitară, $F(z)$ nu poate fi ales arbitrar.

Dacă $G_p(z)$ are poli pe sau în afara cercului de rază unitară se impune încă o restricție lui $G_0(z)$, și anume ca el să conțină, de asemenea, acești poli instabili ai lui $G_p(z)$.

Dacă procesul $G_p(z)$ nu are timp mort, iar toate zerourile reale sunt situate în interiorul cercului de rază unitară, F(z) poate fi ales egal cu 1 și se obțin răspunsuri minimale pentru fiecare tip de semnal de referință, după cum urmează (conform (9.28)):

$r(t) = 1(t)$ $\quad G_0(z) = z^{-1}$

$r(t) = t$ $\quad G_0(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$

$r(t) = t^2$ $\quad G_0(z) = 3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$.

Aceste relații indică faptul că eroarea staționară se va anula după un tact pentru referință treaptă, respectiv 2 tacte pentru referință rampă și așa mai departe. În general, pentru o mărime de intrare de forma t^m, timpul minim de stabilire al sistemului cu răspuns minimal este m + 1 perioade de eșantionare, dacă este îndeplinită condiția de realizabilitate fizică și nu este necesar ca F(z) ≠ 1

Exemplul 9.2

Fie procesul descris de funcția de transfer:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

și perioada de eșantionare 0,1s. Să se proiecteze un regulator numeric a.î. sistemul să dea un răspuns minim atunci când mărimea de intrare este o funcție treaptă unitară.

$$G_p(z) = (1 - z^{-1}) Z\left\{ L^{-1}\left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\} \right\} = \frac{0{,}005 z^{-1}(1 - 0{,}9 z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0{,}905 z^{-1})}.$$

S-a considerat extrapolatorul de ordin 0 inclus în partea fixată.

Deoarece $G_p(z)$ nu are timp mort și toate zerourile sale se găsesc în interiorul cercului de rază unitară în planul z, F(z) poate fi ales egal cu 1. Rezultă conform (9.27):

$$1 - G_0(z) = 1 - z^{-1}$$

sau

$$G_0(z) = z^{-1} = \frac{1}{z}.$$

Pentru $R(z)= z/(z-1)$ se obține:

$$Y(z) = R(z)G_0(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots..$$

Regulatorul de pe calea directă $G_R(z)$ se determină cu relația:

$$G_R(z) = \frac{G_0(z)}{1 - G_0(z)\,G_p(z)} \frac{1}{} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \frac{(1-z^{-1})(1-0{,}905z^{-1})}{0{,}005z^{-1}(1-0{,}9z^{-1})} =$$

$$= 200\frac{1-0{,}905z^{-1}}{1-0{,}9z^{-1}}$$

şi este fizic realizabil.

X. Proiectarea sistemelor automate discrete pe modele intrare-stare-ieşire

În teoria modernă a controlului automat reprezentarea de stare joacă un rol important.

Există mai multe metode de determinare a variabilelor de stare. În cele ce urmează, doar două metode sunt prezentate: soluția unei ecuații diferențiale vectoriale pentru un sistem cu extrapolator de ordin 0 și introducerea, prin substituție directă, în ecuația cu diferențe.

10.1. Ecuația vectorială cu diferențe obținută pe baza ecuației diferențiale vectoriale

Se presupune că ecuația diferențială a sistemului monovariabil și variabilele de stare x(t) sunt date.

Ecuatia de stare este:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{10.1}$$

iar ecuatia ieşirii este

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{10.2}$$

Ecuația diferențială de stare poate fi rezolvată cu ajutorul transformatei Laplace

$$sX(s) - X(0^+) = AX(s) + BU(s) \tag{10.3}$$

unde $X(0^+)$ reprezintă starea inițială. Se obține:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} X(0^+) + (sI - A)^{-1} BU(s). \tag{10.4}$$

Cu ajutorul transformatei Laplace inverse se obține:

$$X(t) = \phi(t)X(0^+) + \int_0^t \phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau \tag{10.5}$$

unde

$$\phi(t) = L^{-1}\left\{[sI - A]^{-1}\right\} = e^{At} \tag{10.6}$$

$\phi(t)$ este numită matricea tranzițiilor de stare.

Rezultă deci, necesitatea evaluării matricei exponențiale $\phi(t)$ deci ecuația (10.6) În practică, un pachet software este utilizat pentru evaluarea exponențialei unei matrice. Totuşi, este bine să se cunoască metodele posibile pentru aceasta şi posibilele lor neajunsuri.

Metoda 1. Trunchierea seriei de puteri

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(At)^k}{k!}.$$

Metoda funcționează bine atât timp cât At este mic comparativ cu 1. Mărimea lui At este de obicei măsurată cu o normă, cea mai simplă fiind norma Frobenius $\|\cdot\|_F$ definită astfel:

$$\|x\|_F \overset{\Delta}{=} \left(\sum_{i,j} x_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Metoda 2 Metoda valorilor proprii

În cadrul acestei metode se face o determinare a valorilor proprii ale matricei A. Să considerăm cazul valorilor proprii distincte. În acest caz A poate fi rescrisă ca:

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

unde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n)$. Apoi se determină e^{At} ca fiind:

$$e^{At} = T(e^{\Lambda t})T^{-1}.$$

Metoda 3. Integrarea numerică

Se poate arăta cu ușurință că matricea exponențială este soluția unică $\psi(t)$ a ecuației diferențiale matriceale

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = A\Psi(t) \qquad \Psi(0) = I.$$

Numeroase metode de integrare numerică se pot utiliza pentru rezolvarea ecuației anterioare ca multipas sau Runge-Kutta, de exemplu. Dacă se utilizează metoda Euler multipas, de exemplu, atunci soluția este echivalentă cu

$$e^{At} = \left(I + A\frac{t}{n} \right)^n.$$

Similar, Runge-Kutta de ordinul 4 cu pas fix este echivalentă cu

$$e^{At} = \left(I + \left(\frac{At}{n}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{At}{n}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{At}{n}\right)^3 + \frac{1}{n!}\left(\frac{At}{n}\right)^n \right)^n.$$

Metoda 4. Abordarea cu ajutorul teoremei Cayley-Hamilton

Teorema Cayley-Hamilton atestă că orice matrice n x n satisface propria ecuație caracteristică

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots\ldots + \alpha_0 I = 0.$$

Rezultă că pentru orice $m \geq n$, A^m poate fi scrisă ca o combinație liniară de $(I,A,...A^{n-1})$. Rezultă că există nişte funcții scalare $\varphi_0(t).....\varphi_{n-1}(t)$ astfel încât:

$$e^{At} = \varphi_0(t)I + \varphi_1(t)A + ... \varphi_{n-1}(t)A^{n-1}.$$

Problema de a găsi e^{At} se reduce la a găsi $\varphi_0(t).....\varphi_{n-1}(t)$. Deoarece:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

$$\varphi_0(t)I + \varphi_1(t)A + ... \varphi_{n-1}(t)A^{n-1} = \varphi_0(t)A + \varphi_1(t)A^2 + ... \varphi_{n-1}(t)A^n.$$

O soluție posibilă este ca $\varphi_i(t)$ să satisfacă

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Pentru că $e^{A0} = I$ se alege $\varphi_0(0)=1$ şi $\varphi_i(0)=0$ pentru $i \neq 0$. Am redus astfel problema la rezolvarea unei ecuații diferențiale vectoriale. Rezolvarea acestei ecuații poate fi făcută prin integrare numerică.

Ecuația vectorială cu diferențe

Pentru sisteme cu intrări şi ieşiri eşantionate, reprezentarea pe stare poate fi obținută simplu din (10.5) şi (10.6) considerând că procesul liniar este prevăzut cu extrapolator de ordin 0 pe intrări

$$u(t) = u(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T \tag{10.7}$$

şi cu starea inițială $x(kT)$ pentru $kT \leq t \leq (k+1)T$

$$x(t) = \phi(t - kT)x(kT) + u(kT)\int_{kT}^{t} \phi(t - \tau)B d\tau. \tag{10.8}$$

Dacă interesează numai soluția la $t = (k+1)T$, atunci

$$x((k+1)T) = \phi(T)x(kT) + u(kT)\int_{kT}^{(k+1)T} \phi((k+1)T - \tau)B d\tau \tag{10.9}$$

şi cu substituția $q = (k+1)T - \tau$; $dq = -d\tau$ rezultă

$$x(k+1) = \phi(T)x(k) + u(k)\int_{0}^{T} \phi(q)B dq. \tag{10.10}$$

Se introduc notațiile prescurtate:

$$\left.\begin{aligned}\phi &= \phi(T) = e^{AT}\\ \Gamma &= \int_0^T \phi(q)Bdq\end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

Se obţine ecuaţia cu diferenţe vectorială:

$$x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k). \qquad (10.12)$$

Din (10.2) se obţine ecuaţia ieşirii:

$$y(k)=Cx(k)+Du(k). \qquad (10.13)$$

10.2. Ecuaţia vectorială cu diferenţe obţinută pe baza ecuaţiei cu diferenţe a sistemului

Dacă ecuaţia cu diferenţe pentru sistemul discret este disponibilă (dacă este dat modelul intrare-ieşire al sistemului prin G(z)), reprezentarea pe stare se poate obţine prin introducerea variabilelor de stare aşa cum se va arăta în continuare

$$\begin{aligned}&y(k+n)+a_1y(k+n-1)+....+a_ny(k) =\\ &b_0u(k+n)+b_1u(k+n-1)+....+b_nu(k).\end{aligned} \qquad (10.14)$$

Această ecuaţie se obţine din (8.2) substituind k cu k+n.

Funcţia de transfer corespunzătoare este:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1}+.....+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+.....+a_nz^{-n}} = \frac{b_0z^n + b_1z^{n-1}+.....+b_n}{z^n+a_1z^{n-1}+.....+a_n}. \qquad (10.15)$$

Se introduc următoarele variabile de stare:

$$\left.\begin{aligned}y(k) &= x_1(k)\\ y(k+1) &= x_2(k) = x_1(k+1)\\ y(k+2) &= x_3(k) = x_2(k+1)\\ &\vdots\\ y(k+n-1) &= x_n(k) = x_{n-1}(k+1)\\ y(k+n) &= \qquad\quad = x_n(k+1)\end{aligned}\right\} \qquad (10.16)$$

Substituind (10.16) în (10.14) pentru $b_n = 1$, $b_0, b_1, ..., b_{n-1} = 0$ rezultă

$$y(k+n) = x_n(k+1) = -a_1x_n(k) - a_2x_{n-1}(k) - .... - a_nx_1(k) + u(k)$$

Această ultimă ecuaţie conduce la următoarea ecuaţie vectorială cu diferenţe:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (10.17)$$

şi ecuaţia ieşirii

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}. \quad (10.18)$$

Această relaţie este valabilă dacă $b_n = 1$ şi $b_0 \ldots . b_{n-1} = 0$, adică:

$$y(z) = \frac{1}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots . + a_n} u(z) = x_1(z). \quad (10.19)$$

Totuşi dacă, în cazul general, $b_n \neq 1$ şi $b_0 \ldots . b_{n-1} \neq 0$ din ecuaţia (10.15) şi (10.19) rezultă:

$$y(z) = b_n x_1(z) + b_{n-1} z x_1(z) + \ldots . + b_0 z^n x_1(z) \quad (10.20)$$

sau

$$y(k) = b_n x_1(k) + b_{n-1} x_1(k+1) + \ldots . + b_0 x_1(k+n).$$

Din ecuaţia (10.16)

$$y(k) = b_n x_1(k) + b_{n-1} x_2(k) + \ldots . + b_1 x_n(k) + b_0 x_n(k+1) \quad (10.21)$$

Dar

$$x_n(k+1) = y(n+k) = -a_1 x_n(k) - a_2 x_{n+1}(k) - \ldots \ldots - a_n x_1(k) + u(k) \quad (10.22)$$

şi substituind rezultă:

$$y(k) = (b_n - b_0 a_n) x_1(k) + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) x_2(k) + \ldots . + \quad (10.23)$$
$$+ (b_1 - b_0 a_1) x_n(k) + b_0 u(k).$$

În scriere vectorială , această ecuaţie (a ieşirii) devine:

$$y(k) = \begin{bmatrix} (b_n - b_0 a_n) \ldots \ldots \ldots \ldots (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (10.24)$$

$$C = \begin{bmatrix} (b_n - b_0 a_n) \ldots \ldots \ldots \ldots (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix}.$$

Dacă $b_0 = 0$ rezultă

$$C = \begin{bmatrix} b_n \ldots \ldots \ldots b_1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (10.25)$$

Fig.10.1 prezintă o diagramă bloc pentru ecuația cu diferențe rezultată din (10.16), (10.22) care sugerează și o posibilă implementare pe calculator a acestei ecuații.

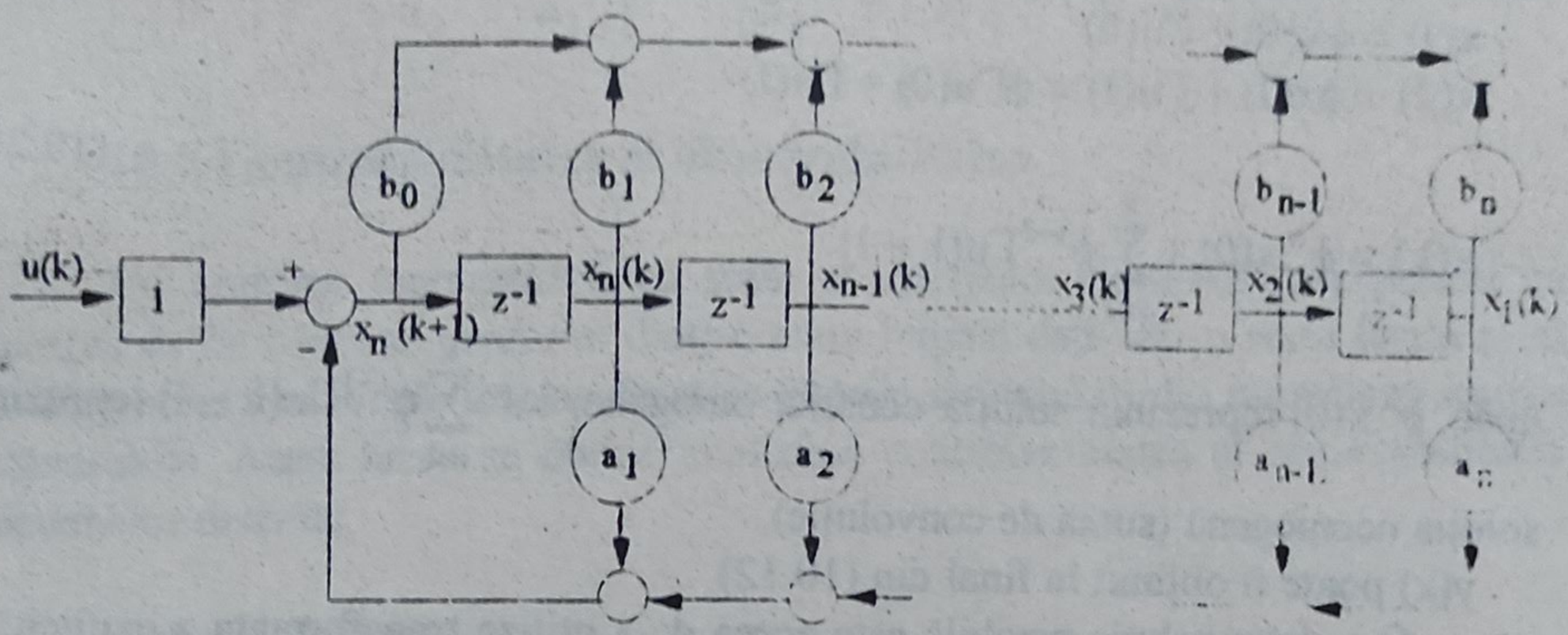


Fig.10.1. Diagrama bloc a reprezentării pe stare a ecuației cu diferențe

În final ecuația cu diferențe devine:

$$x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k). \qquad (10.27)$$

Diagrama bloc pentru sistemul descris de ecuațiile (10.26)-(10.27) este reprezentată în fig.10.2.

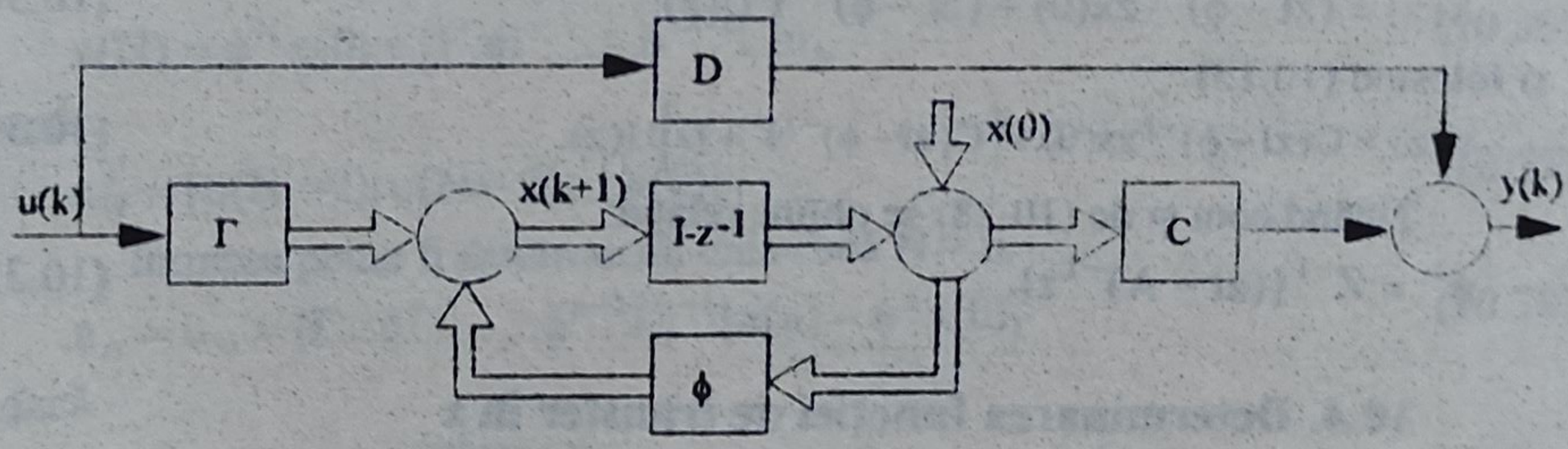


Fig.10.2 Schema bloc a unei ecuații vectoriale cu diferențe de ordinul I

10.3. Soluția ecuației vectoriale cu diferențe

Două soluții posibile ale ecuației cu diferențe (10.12) și (10.13)

$$x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k).$$

sunt prezentate în continuare.

O primă posibilitate corespunde soluției recursive a ecuației cu diferențe pentru un semnal dat u(k) şi condiție inițială x(0).

$$x(1) = \phi x(0) + \Gamma u(0)$$
$$x(2) = \phi x(1) + \Gamma u(1) = \phi\Gamma u(0) + \Gamma u(1)$$
$$\vdots \qquad (10.28)$$
$$x(k) = \phi^k x(0) + \sum_{i=1}^{k} \phi^{i-1}\Gamma u(k-1)$$

unde $\phi^k x(0)$ reprezintă soluția ecuației omogene, iar $\sum_{i=1}^{k} \phi^{i-1}\Gamma u(k-1)$ reprezintă soluția neomogenă (sumă de convoluție).

y(k) poate fi obținut în final din (10.12).

O a doua soluție posibilă este aceea de a utiliza transformata z explicită a lui u(k)

$$Z\{x(k)\} = X(z)$$
$$Z\{x(k+1)\} = z(x(k) - x(0))$$

(din teorema deplasării în real).

Din (10.12) rezultă:

$$z(X(z) - x(0)) = \phi X(z) + \Gamma U(z) \qquad (10.29)$$

sau

$$X(z) = (zI - \phi)^{-1} zx(0) + (zI - \phi)^{-1}\Gamma U(z) \qquad (10.30)$$

şi folosind (10.13)

$$Y(z) = C(zI-\phi)^{-1} zx(0) + \left[C(zI-\phi)^{-1}\Gamma + D\right]U(z). \qquad (10.31)$$

Ținând cont şi de (10.28) se obține relația:

$$\phi^k = Z^{-1}\{(zI - A)^{-1} z\}. \qquad (10.32)$$

10.4. Determinarea funcției de transfer în z

Cu condiția inițială X(0) = 0, din (10.32) rezultă:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - \phi)^{-1}\Gamma + D. \qquad (10.34)$$

Numitorul funcției de transfer, obținut fără a opera simplificări, determină ecuația caracteristică

$$\det(zI - \phi) = 0 \qquad (10.35)$$

Pentru un sistem de ordinul 2 scris în forma canonică controlabilă, această ultimă ecuație conduce la:

$$\det\left[z\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\right]=\det\begin{bmatrix}z & -1\\ a_2 & z+a_1\end{bmatrix}=z^2+a_1z+a_2=0.$$

10.5 Controlabilitatea şi observabilitatea

Cu ajutorul reprezentării pe stare a sistemelor dinamice este posibil ca acestea să fie conduse controlat dintr-o stare inițială dată într-o stare finală şi să se determine variabilele interne de stare (stările sistemului) din intrările şi ieşirile măsurabile. Acest lucru se obține analizând controlabilitatea şi observabilitatea sistemelor discrete.

Controlabilitatea

Deoarece în literatură se utilizează mai multe definiții pentru controlabilitate, în cele ce urmează va fi folosită următoarea:

Un sistem dinamic liniar se numeşte controlabil dacă există o secvență de control u(k) care să conducă stările sistemului, într-un interval de timp finit NT, dintr-o stare inițială x(0) într-o stare finală x(N).

Termenul detectactibilitate este folosit în loc de controlabilitate pentru cazul special în care sistemul este adus într-o stare finală din starea x(0) = 0.

Pentru a obține intrarea u(k) se poate porni de la relația (10.28).

$$x(N)=\phi^N x(0)+[\Gamma,\phi\Gamma.....\phi^{N-1}\Gamma]u_N \qquad (10.36)$$

unde

$$u_N^T=[u(N-1),u(N-2)....u(0)]. \qquad (10.37)$$

Intrarea poate fi determinată unic dacă N = n.

$$u_n=u_N=[\Gamma\ \phi\Gamma.....\phi^{n-1}\Gamma]^{-1}[x(n)-\phi^n x(0)] \qquad (10.38)$$

dacă

$$\det[\Gamma\ \ \phi\Gamma.....\phi^{n-1}\Gamma]\neq 0.$$

$C=[\Gamma\ \ \phi\Gamma.....\phi^{n-1}\Gamma]$ este denumită matricea de controlabilitate. Această matrice nu trebuie să aibă coloanele liniar dependente. Deci condiția de controlabilitate se obține:

$$\text{Rang } C=n \qquad (10.39)$$

cu n fiind ordinul sistemului. Pentru N < m nu există soluție pentru n, iar pentru N > n nu există soluție unică.

Exemplul 10.1

Se va examina condițiile de controlabilitate pentru sistemele de ordinul 1 şi 2.

a) $G(z)=\dfrac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}} \Rightarrow \phi=[-a_1];\ \Gamma=[1];\ c=[b_1]$, iar matricea de controlabilitate $C=\Gamma=[1]$.

b)
$$G(z)=\frac{b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}} \Rightarrow \phi=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{bmatrix};\Gamma=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};c=[b_1\ b_2]$$

$$\det C=\det[\Gamma\ \phi\Gamma]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -a_1\end{bmatrix}=-1\neq 0.$$

Şi observabilitatea este întotdeauna nesingulară independent de parametrii procesului, deci sistemele ce au astfel de funcții de transfer sunt întotdeauna controlabile.

Observabilitatea

Un proces liniar este denumit controlabil dacă orice stare x(k) poate fi obținută dintr-un număr finit de variabile de intrare şi de ieşire y(k), y(k+1).... y(k+N-1), u(k),u(k+1).....u(k+N-1).

Condiția de observabilitate poate fi obținută după cum urmează:

- din ecuația ieşirii:

$y(k)=cx(k)$ Re zultã :

$$y(k)=cx(k)$$
$$y(k+1)=c\phi x(k)+c\Gamma u(k)$$
$$y(k+2)=c\phi^2 x(k)+c\phi\Gamma u(k)+c\Gamma u(k)$$
$$\vdots \qquad (10.40)$$
$$y(k+N-1)=c\phi^{N-1}x(k)+\begin{bmatrix}0 & c\Gamma & c\phi\Gamma & \cdots & c\phi^{N-2}\Gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(k)\\ u(k+1)\\ \vdots\\ u(k+N-1)\end{bmatrix}.$$

Dacă vectorul intrării este complet cunoscut, n ecuații sunt necesare pentru a determina vectorul de stare X(k) în sistemul de ecuații. Acest sistem de ecuații devine N = n

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c\phi \\ \vdots \\ c\phi^{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & c\Gamma \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & c\Gamma & c\phi\Gamma & \cdots & c\phi^{n-2}\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+n-1) \end{bmatrix} \quad (10.41)$$

$$O = \begin{bmatrix} c \\ c\phi \\ \vdots \\ c\phi^{n-1} \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & c\Gamma \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & c\Gamma & c\phi\Gamma & \cdots & c\phi^{n-2}\Gamma \end{bmatrix}. \quad (10.42)$$

Vectorul de stare X(k) se obține din:

$$X(k) = O^{-1}\left[\begin{bmatrix} y(k) \\ \vdots \\ y(k+n-1) \end{bmatrix} - S\begin{bmatrix} u(k) \\ \vdots \\ u(k+n-1) \end{bmatrix}\right] \quad (10.43)$$

dacă det $O \neq 0$. Un proces dinamic este deci observabil dacă matricea de observabilitate O are

$$\text{Rang } O = n \quad (10.44)$$

adică O are n rânduri liniar independente.

Exemplul 10.2

Ca şi în cazul precedent, se vor examina din punct de vedere al observabilității procesele discrete de ordinul 1 şi 2.

a) $G(z) = \dfrac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$

$O = c = b_1$.

Procesul este observabil dacă $b_1 \neq 0$.

b) $$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$\det O = \det\begin{bmatrix} c \\ c\phi \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_1 a & (b_2 - a_1 b_1) \end{bmatrix} = b_2^2 + a_2 b_1^2 - a_1 b_1 b_2 \neq 0$$

Toți parametrii procesului determină condiția de observabilitate. Procesul nu este observabil dacă $b_1 = 0$ și $b_2 = 0$ sau dacă zeroul sistemului este egal cu unul din polii sistemului:

$z_{01} = -b_2/b_1$.

Polii sistemului sunt: $z_{1,2} = -a_{1/2} \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_{2/2}}$.

Din

$$z_{01} = z_{12} \Rightarrow -\frac{b_2}{b_1} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \Leftrightarrow -\frac{b_2}{b_1} + \frac{a_1}{2} = \sqrt{a_1^2 - 2a_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_2^2}{b_1^2} + \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1 b_2 b_1}{b_1^2} = \frac{a_1^2}{4} - \frac{4a_2}{4} \Leftrightarrow b_2^2 + a_2 b_1^2 - a_1 b_1 b_2 = 0$$

Aceste exemple pun în evidență faptul că observabilitatea și controlabilitatea se pierd în cazul în care poli și zerouri ale funcției de transfer se simplifică. Pentru sisteme monovariabile, partea controlabilă și observabilă formează așa numita "realizare minimală", care este o reprezentare cu un număr minimal de variabile de stare.

10.6 Controlul după stare cu o ecuație caracteristică dată

Un proces controlabil cu ecuația stării

$$x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k) \tag{10.44}$$

poate fi modificat prin reacție după stare

$$u(k) = -Lx(k) \tag{10.45}$$

astfel încât polii sistemului rezultat

$$x(k+1) = (\phi - \Gamma L)x(k) \tag{10.46}$$

sau coeficienții ecuației caracteristice

$$\det[zI - \phi + \Gamma L] = 0$$

să fie de valori fixate. Procedura de alocare a polilor se referă doar la sisteme monovariabile. Ecuația de stare poate fi pusă în forma canonică controlabilă

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k). \tag{10.47}$$

Ecuația feedback-ului este

$$u(k) = -Lx(k) = -\begin{bmatrix} l_n & l_{n-1} & \cdots & l_1 \end{bmatrix} x(k). \qquad (10.48)$$

Substituind (10.48) în (10.47) rezultă:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ (-a_n - l_n) & (-a_{n-1} - l_{n-1}) & \cdots & \cdots & (-a_1 - l_1) \end{bmatrix} x(k). \qquad (10.49)$$

Ecuația caracteristică poate fi scrisă în forma:

$$\det[zI - \phi + \Gamma L] =$$

$$(a_n + l_n) + (a_{n-1} + l_{n-1})z + \ldots\ldots + (a_1 + l_1)z^{n-1} + z^n =$$

$$= \alpha_n + \alpha_1 z + \ldots\ldots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + z_n = 0$$

ceea ce conduce la următoarele relații între elementele vectorului L^T şi coeficienții doriți ai ecuației caracteristice α_i:

$$l_i = \alpha_i - a_i, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (10.50)$$

Prin alocare de poli se impune:

$$\det[zI - \phi + \Gamma L] = (z - z_1)(z - z_2)\ldots.(z - z_n) \qquad (10.51)$$

unde $z_1 \ldots z_n$ sunt polii aleşi de proiectant pentru sistemul în buclă închisă cu reacție după stare.

Din (10.51) se calculează α_i şi apoi se deduc valorile l_i cu (10.50). Prin această metodă nu se impune nici o condiție asupra mărimilor sistemului şi a factorului de amplificare al acestuia. De asemenea, răspunsul sistemului la perturbații externe nu este luat în considerare. Avantajul acestei metode constă în aceea că se dă o interpretare clară a modificării coeficienților α_i, ai ecuației caracteristice în funcție de elementele matricei L.

10.7 Controlul după stare prin metoda timpului finit (deadbeat)

Se consideră un proces monovariabil controlabil de ordin n

$$x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k) \qquad (10.52)$$

S-a arătat în secțiunea 10.5 că acest proces poate fi condus din orice stare inițială în starea $x(N)=0$ în $N = n$ perioade de eşantionare. Secvența mărimilor de comandă poate fi calculată cu ajutorul relației (10.39) Secvența mărimilor de comandă poate fi, de asemenea, generată printr-o reacție după stare:

$$u(k) = -Lx(k) \tag{10.53}$$

Astfel se obține:

$$x(k+1) = (\phi - \Gamma L)x(k) = \phi' x(k) \tag{10.54}$$

sau

$$\begin{aligned} x(1) &= \phi' x(0) \\ x(2) &= \phi'^2 x(0) \\ &\vdots \\ x(N) &= \phi'^N x(0). \end{aligned} \tag{10.55}$$

Pentru $x(N) = 0$ rezultă $\phi'^N = 0$.

Ecuația caracteristică a sistemului închis este:

$$\det[zI - \phi'] = \alpha_n + \alpha_{n-1} z + \ldots + \alpha_1 z^{n-1} + z^n = 0. \tag{10.56}$$

Din teorema Cayley-Hamilton rezultă că o matrice pătratică satisface propria ecuație caracteristică

$$\alpha_n I + \alpha_{n-1}\phi' + \ldots + \alpha_1 \phi'^{n-1} + \phi'^n = 0. \tag{10.57}$$

(10.55) satisface, de asemenea,

$N = n$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$

Ecuația caracteristică devine deci:

$$\det[zI - \phi'] = z^n = 0. \tag{10.58}$$

Comportarea de tip deadbeat este dată de existența unui pol multiplu de ordin n în origine.

Folosind forma canonică controlabilă a sistemului

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k).$$

$$u(k) = -Lx(k) = -\begin{bmatrix} l_n & l_{n-1} \ldots . l_1 \end{bmatrix} x(k) \tag{10.47}$$

Cu ajutorul ecuației feedback-ului $u(k) = -Lx(k)$(10.47) substituită în expresia lui $x(k+1)$ se poate determina matricea de evoluție a sistemului în buclă închisă Φ-ΓL și apoi ecuația caracterisrică.

$$\begin{aligned} &\det\{zI - \phi + \Gamma L] = \\ &= (a_n + l_n) + (a_{n-1} + l_{n-1})z + \ldots + (a_1 + l_1)z^{n-1} + z^n = 0 \\ &\Rightarrow a_n = -l_n \ldots \ldots a_1 = -l_1; \quad l_i = -a_i, \; i = \overline{1,n} \end{aligned} \tag{10.59}$$

Controlerul deadbeat descris în 9.1 conduce procesul din orice stare inițială x(0)=0 în n perioade de eşantionare către o stare finală şi ieşire constantă.

$$y(n) = y(n+1) = ... = y(\infty)$$

şi către o comandă constantă

$$u(n) = u(n+1) = ... = u(\infty).$$

Controlerul deadbeat descris în această secțiune conduce procesul din orice stare inițială $x(0)\neq 0$ către o stare finală $x(n)=0$. Ambele sisteme au aceeaşi ecuație caracteristică $z^n = 0$, au aceeaşi comportare pentru perturbații inițiale x(0), deoarece comportarea la perturbații inițiale depinde numai de ecuația caracteristică (vezi 10.28, 10.33).

10.8 Estimator de stare

Dacă variabilele de stare nu sunt direct măsurabile, acestea trebuie determinate folosind cantități măsurabile. Fie procesul dinamic liniar discret:

$$x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k)$$
$$y(k) = Cx(k) \qquad (10.60)$$

pentru care presupunem că doar vectorul u(k) şi vectorul ieşirii y(k) pot fi măsurate fără eroare şi că variabilele de stare sunt observabile. Un model al procesului cu aceeaşi structură este conectat în paralel cu procesul ca în fig. 10.3.

Corecția de stare $\Delta\hat{x}(k+1)$ este generată prin feedback-ul diferenței dintre ieşirea procesului şi a modelului.

$$\Delta l(k) = y(k) - \hat{y}(k) \qquad (10.61)$$

ponderată cu o matrice H astfel încât să asigure convergența dintre stările modelului şi ale procesului. Acest model este numit estimator de stare Luenberger.

Matricea constantă H trebuie aleasă astfel încât $\hat{x}(k+1)$ să se aproprie asimptotic de x(k+1) pentru $k \to \infty$. Fig.10.3 ne conduce la următoarele ecuații ale estimatorului:

$$\hat{x}(k+1) = \phi\hat{x}(k) + \Gamma u(k) + H\Delta l(k) = \phi\hat{x}(k) + \Gamma u(k) + H(y(k) - C\hat{x}(k)) \qquad (10.62)$$

iar eroarea de estimare este

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1). \qquad (10.63)$$

Din (10.61) şi (10.63) rezultă:

$$\tilde{x}(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k) - \phi\hat{x}(k) - \Gamma u(k) - HC(x(k) - \hat{x}(k)) =$$
$$= (\phi - HC)\tilde{x}(k). \qquad (10.64)$$

Se obține astfel o ecuație cu diferențe omogenă. Vectorul variabilelor de stare depinde numai de starea inițială a stării $\tilde{x}(0)$ și este independent de intrarea u(k). Pentru convergența la 0 a erorii de estimare este necesar ca $\lim_{k\to\infty} \tilde{x}(k) = 0$,

(10.64) trebuie să fie asimptotic stabilă. Deci ecuația caracteristică:

$$\det[zI - \phi + HC] = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) = \\ = \gamma_n + \gamma_{n-1}z + \ldots + z^n = 0 \qquad (10.65)$$

poate avea rădăcinile doar în interiorul cercului de rază unitară $|z_i| < 1$, $i = \overline{1,n}$. Amplasarea polilor este influențată de alegerea matricei H.

Dacă se impun polii doriți ai estimatorului $z_1 \ldots z_n$, se pot calcula coeficienții γ_i, $i = \overline{1,n}$ și din $\det[zI - \phi + HC] = 0$, prin egalizarea coeficienților celor două ecuații rezultă un sistem de n ecuații cu n necunoscute. Rezolvând acest sistem de ecuații se determină h_i, $i = \overline{1,n}$.

Dacă pentru ecuația caracteristică dorită din (10.65) se impune o comportare deat-beat, adică o ecuație caracteristică $z^n = 0 \Leftrightarrow \gamma_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, h_i, $i = \overline{1,n}$ se determină în același mod.

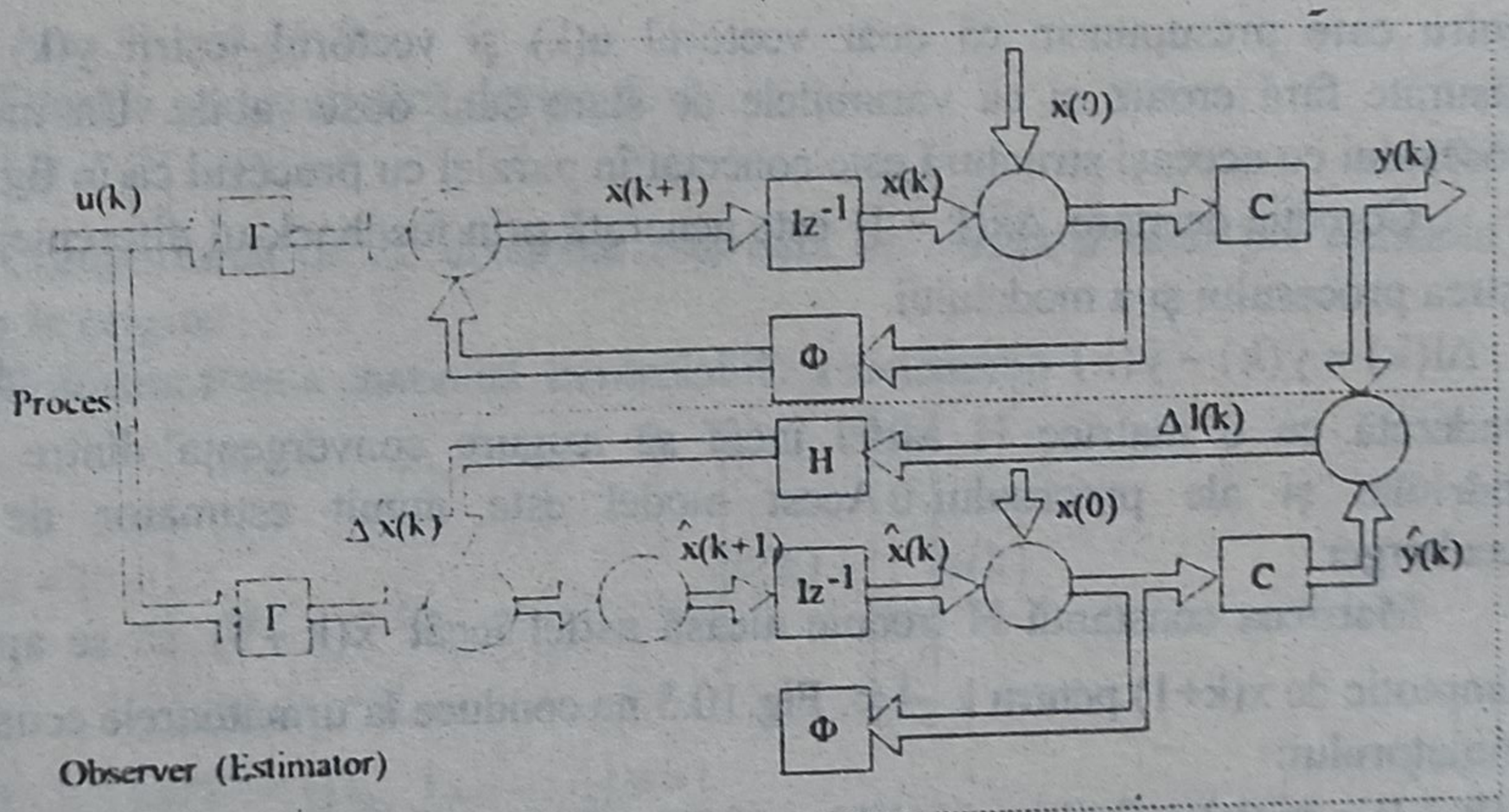


Fig.10.3 Un proces dinamic cu estimator de stare

XI. Implementarea sistemelor cu informaţii discrete

Problema implementării algoritmilor de reglare pentru sistemele cu informaţii discrete fiind discutată în capitolele anterioare, în cadrul acestui capitol vor fi abordate problemele legate de implementarea acestor legi de reglare.

Legile de reglare obţinute în urma proiectării, indiferent prin ce metodă, sunt sisteme dinamice discrete. Problema principală este de a implementa aceste sisteme dinamice folosind calculatoare numerice.

Regulatoarele numerice obţinute prin proiectare pot avea diferite reprezentări în funcţie de metoda de proiectare utilizată.

În cazul metodelor de alocare de poli prin reacţie după stare estimată, rezultă un regulator numeric de forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \Phi\hat{x}(k) + \Gamma u(k) + H(y(k) - \hat{y}(k)) \\ u(k) &= -L\hat{x}(k) + r(k) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) \end{aligned} \tag{11.1}$$

În această reprezentare stările regulatorului sunt $\hat{x}$, unde $\hat{x}$ reprezintă o estimare a stărilor procesului real. Forma (11.1) este numită o *reprezentare cu un observer explicit* din cauza interpretării fizice a stărilor regulatoruhui.

Se observă că regulatorul este un sistem discret liniar cu intrările r şi y şi cu ieşirea u. Un astfel de regulator poate fi întotdeauna reprezentat în forma:

$$\begin{aligned} u(k) &= Cx(k) + Dy(k) + D_r r(k) \\ x(k+1) &= Fx(k) + Gy(k) + G_r r(k). \end{aligned} \tag{11.2}$$

Ultima relaţie este o reprezentare generală pe stare a unui sistem dinamic liniar.

Metodele de proiectare pentru sistemele monovariabile, discutate în capitolele 7 - 9, ne-au condus la regulatoare de forma:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = G_R(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \tag{11.3}$$

şi ţinând cont de faptul că:

$$E(z) = R(z) - Y(z) \tag{11.4}$$

(11.3) poate fi rescrisă în forma:

$$U(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}R(z) - \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}Y(z). \tag{11.5}$$

În general, regulatorul în *reprezentare intrare-ieşire* rezultă în urma proiectării de forma:

$$P(z^{-1})U(z) = Q(z^{-1})R(z) - S(z^{-1})Y(z). \qquad (11.6)$$

Bineînțeles că, dispunând de una din aceste reprezentări, o putem deduce pe cealaltă.

Implementarea unui sistem discret descris de (11.2) sau (11.6) pe un calculator numeric rezultă imediat. Particularitățile apar datorită suportului hardware şi software disponibil. Să presupunem că sistemul descris de (11.2) trebuie implementat pe un calculator numeric prevăzut cu convertoare analog-numerice şi numeric-analogice şi un ceas de timp real. Execuția programului va fi controlată de acest ceas. O reprezentare grafică a programului este prezentată în fig.11.1.

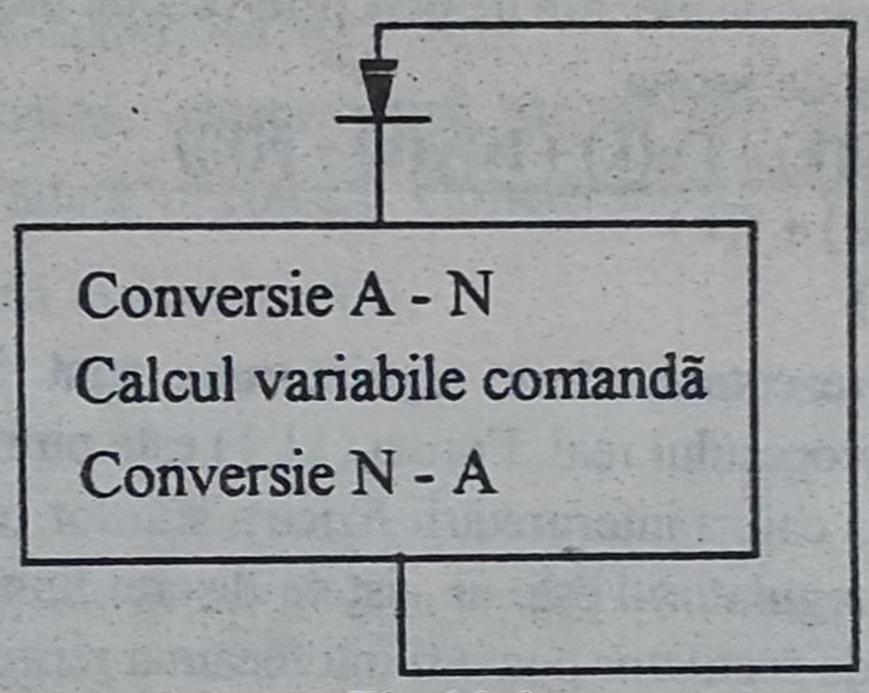


Fig.11.1

Linia orizontală indică faptul că execuția programului este oprită până când soseşte o întrerupere de la ceasul de timp real. Ceasul este programat astfel încât să genereze întreruperi cu perioada T, în fiecare moment de eşantionare. Rutina de tratare a întreruperii este de tipul:

1. import y r
2. u: = C * x + D * y + D_r * r
2. x: = F * x + G * y + G_r * r
4. outport u.

Prima linie comandă conversia A - N. Aceasta presupune startarea convertorului A - N şi citirea valorilor numerice ale mărimilor y şi r de la adresa portului corespunzător convertorului A - N şi înscrierea lor în memorie. Mărimea de comandă u este calculată în linia 2 şi necesită operații de înmulțire şi adunare

de matrici. Vectorul stărilor x este actualizat în a treia linie, iar în ultima linie este comandată conversia N - A, valoarea numerică a conversiei u fiind trimisă către convertorul N - A. Pentru a putea scrie detaliat codul rutinei este necesar să cunoaştem limbajul în care se doreşte a se scrie programul, declarațiile de tip pentru vectorii x, u, y şi r şi pentru matricele C. F, D, G, D_r şi G_r şi adresele porturilor la care sunt plasate convertoarele. De exemplu, este necesar să se inițializeze valorile vectorului stărilor şi ale conversiei.

Limbajele uzuale nu efectuează operații cu matrice şi de aceea este necesar să se scrie procedurile adecvate pentru generarea operațiilor cu matrici folosind operații cu mărimi scalare. De remarcat că linia a doua şi a treia din rutina de întrerupere scrisă compact anterior corespunde exact algoritmului de reglare din (11.2).

Mai trebuie menționat faptul că implementarea algoritmilor de reglare numerică, utilizând un sistem de calcul conectat în bucla de reglare (fig.11.1), presupune posibilitatea transformării acestuia într-un *sistem de timp real*.

Deoarece nu există o definiție precisă pentru sistemele de timp real, se asociază noțiunea de timp real cu ideea de a controla un sistem supus unor *restricții de timp*. În cazul sistemelor de reglare discrete principalele restricții de timp se referă la eşantionarea semnalelor la momente de timp multipli ai perioadei de eşantionare şi de a efectua calculele pentru obținerea comenzii u şi conversiile A - N şi N - A în cel mult o perioadă de eşantionare.

Un sistem de calcul în timp real trebuie să conțină obligatoriu următoarele componente hardware: un ceas de timp real, un controler de întreruperi programabil, interfețe de intrare/ieşire ce se pot adapta procesului.

Toate acestea sunt gestionate de un sistem de operare. Într-un sistem de operare se poate lucra atât cu limbaje specializate, cât şi cu cele de uz general (C, PASCAL), dar care conțin instrucțiuni specifice timpului real.

Microsistemele cu procesoare CISC (Complex Instruction Set Computer) cele mai răspândite: Intel 80x86, Motorola 680x0 pot fi transformate în sisteme de timp real prin adăugarea unor interfețe hardware şi a unor instrumente software adecvate operării în timp real.

Pentru a obține un bun sistem de control este, de asemenea, necesar să se țină cont de următoarele aspecte: calculul numeric, traductoarele, elementele de exccuție, aspectele operaționale, aspecte de programare şi alegerea perioadei de eşantionare.

11.1 Prefiltrarea şi întârzierea computaţională

În această secţiune se va discuta despre interfaţa cu traductoarele. De obicei este necesară utilizarea unui filtru analogic pentru a preveni fenomenul numit "aliasnig". De asemenea, din secţiunea anterioară a rezultat că întotdeauna există o întârziere datorată timpului de calcul.

Filtrarea semnalelor analogice şi întârzierea computaţională dau naştere unei dinamici suplimentare, care poate fi semnificativă în implementarea unui regulator numeric.

Prefiltrarea analogică

Din subcapitolul 4.2 a rezultat că spectrul de frecvenţă al semnalului discretizat f*(t), notat F*(jω) rezultă din spectrul semnalului continuu f(t), notat F(jω) multiplicat în jurul multiplilor frecvenţei de eşantionare ω_0 (fig.4.1). De aici a rezultat că frecvenţa $\omega_0/2$, numită şi frecvenţa Nyquist joacă un rol important.

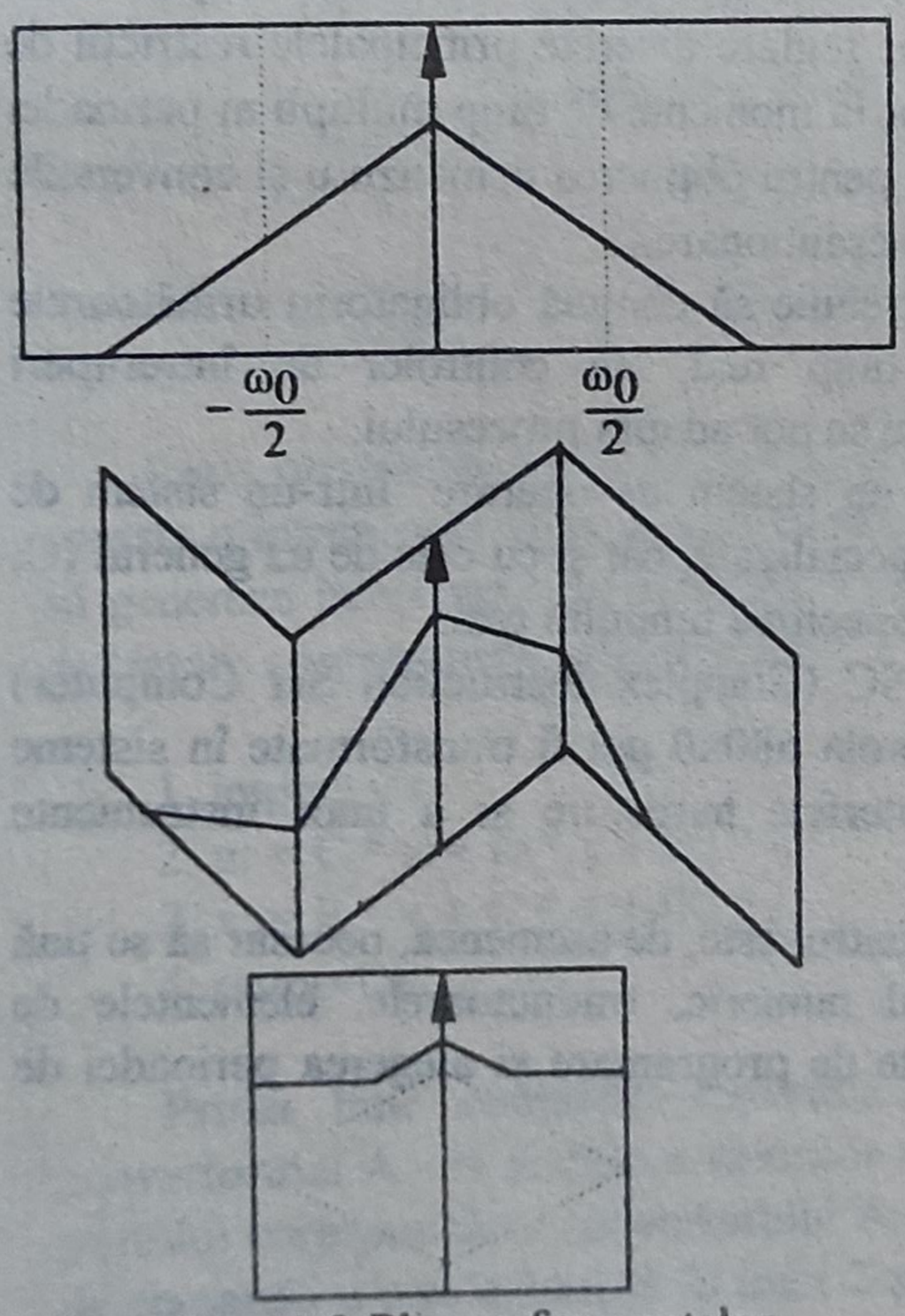


Fig.11.2 Plierea frecvenţelor

Dacă semnalul continuu nu are componente de frecvenţă mai mare decât frecvenţa Nyquist, transformata Fourier a semnalului discret este pur şi simplu o repetare periodică a transformatei Fourier a semnalului continuu.

Dacă însă condiţia din teorema lui Shannon nu este îndeplinită spectrele se interpătrund şi valoarea transformatei Fourier a semnalului eşantionat la o frecvenţă ω este suma valorilor transformatei Fourier a semnalului continuu la frecvenţele $\omega + n\omega_0$. După eşantionare nu mai este posibil să se separe contribuţiile acestor frecvenţe în spectrul obţinut. Frecvenţa ω poate fi atunci considerată ca şi (alias) $\omega + n\omega_0$. După eşantionare, o frecvenţă nu se mai poate discerne de celelalte asemenea ei.

De remarcat faptul că deşi eşantionarea este o operaţie liniară, nu este şi invariantă în timp. Această explică de ce noi frecvenţe vor fi create prin eşantionare.

Discuţiei de până acum îi poate fi dată şi o altă interpretare. Să presupunem spectrul semnalului continuu desenat pe o foaie de hârtie.

Hârtia este apoi îndoită pe abscisele ce sunt multipli ai frecvenţei Nyquist, ca în figura 11.2. Spectrul semnalului eşantionat este apoi obţinut prin sumarea contribuţiilor tuturor spectrelor de pe toate foile de hârtie. În practică apare o dificultate datorată faptului că semnalele reale nu au o transformată Fourier care să devină 0 în afara unei benzi de frecvenţă. Aceasta face ca după eşantionare componentele de înaltă frecvenţă să apară ca şi componente de joasă frecvenţă. Pentru a rezolva această problemă este necesară filtrarea semnalelor analogice înainte de eşantionare. Acest lucru poate fi făcut în mai multe feluri.

Adesea este posibil ca traductoarele analogice să fie prevăzute cu un filtru, dar acesta este ales pentru o anumită problemă de control. Acest filtru poate fi modificat astfel încât semnalele de la traductor să nu aibă frecvenţe peste frecvenţa Nyquist.

Alteori, o soluţie simplă constă în a introduce un filtru analogic înaintea eşantionorului. Un circuit analogic standard pentru un filtru de ordinul 2 cu funcţia de transfer:

$$G_f(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \qquad (11.7)$$

este prezentat în fig.11.3. Funcţia de transfer a filtrului este dată de (11.7) $\omega = 1/RC$.

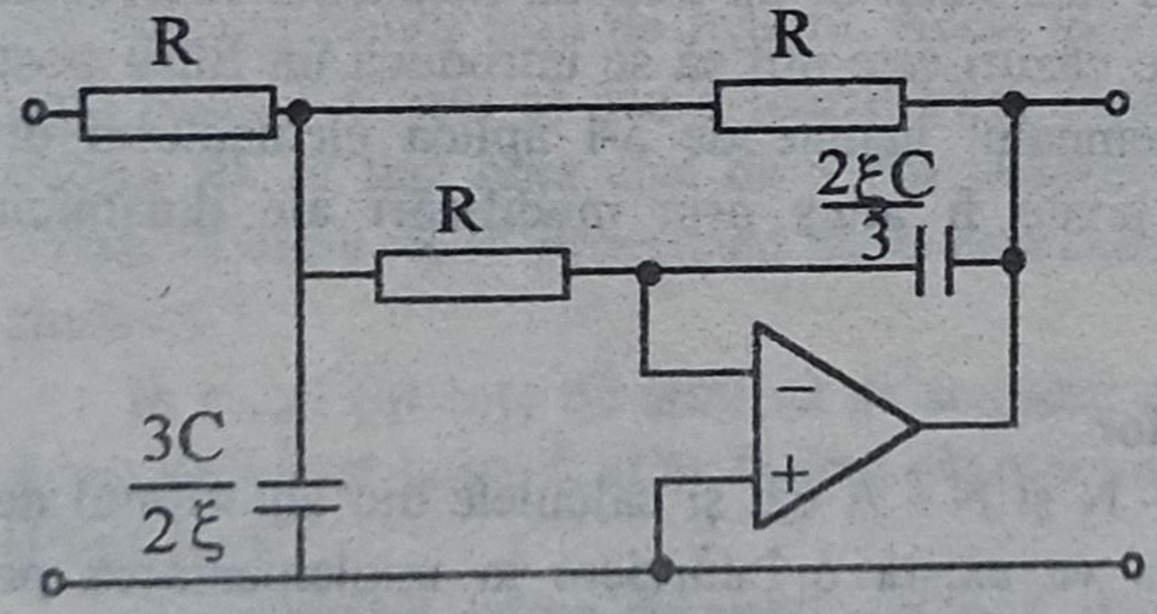


Fig.11.3 Filtru de ordin 2

Filtrele de ordin mai mare se obţin prin conectarea în cascadă a filtrelor de ordinul 1 şi 2

Dacă se utilizează un filtru Bessel, acesta are o caracteristică fază frecvenţă liniară, ceea ce înseamnă că forma semnalului nu va fi distorsionată prea mult. Astfel de filtre sunt indicate în sistemele de înaltă performanţă.

Filtrul trebuie luat în calcul în proiectarea regulatorului dacă frecvența de tăiere este mai mare decât ω_B /10, unde ω_B este lărgimea de bandă a filtrului. Filtrul Bessel poate fi aproximat cu o întârziere pură, deoarece are faza liniară la frecvențe joase. Aceasta implică faptul că modelul semnalului eşantionat incluzând filtrul "antialiasing" poate fi considerat ca incluzând un timp mort.

Într-o problemă de control există în mod normal suficientă informație despre semnale în forma ecuațiilor diferențiale ale modelului procesului şi, posibil, de asemenea, şi pentru perturbații. Un filtru Kalman analogic constituie un prefiltru foarte bun deoarece se bazează pe o descriere detaliată a semnalului. Există mai multe avantaje în implementarea filtrului Kalman în calculator (numeric). În acest caz, este util să se eşantioneze semnalul analogic cu o frecvență mai mare decât frecvența de eşantionare $\nu = 1/T$ şi să se renunțe la prefiltrul analogic proiectat din punctul de vedere al procesării semnalelor. Funcția de transfer a filtrului "antialiasing" trebuie înglobată în funcția de transfer a procesului la proiectarea sistemului automat.

Dacă perioada de eşantionare se modifică, prefiltrul trebuie de asemenea schimbat. Cu componente obişnuite se pot construi prefiltre analogice pentru perioade de eşantionare de ordinul secundelor. Pentru perioade de eşantionare mai mari, este simplu să se eşantioneze semnalul mai des (o dată pe secundă) cu un prefiltru analogic adecvat şi apoi să se aplice o filtrare numerică semnalului. Această variantă conduce şi la avantajul că modificarea perioadei de eşantionare se poate face numai prin modificări software.

De asemenea, semnalul provenit de la convertorul N - A şi care este de obicei constant pe durata unei perioade de eşantionare, convertoarele N - A uzuale fiind prevăzute cu extrapolatoare de ordin 0, este uneori filtrat. Dacă procesul este un sistem slab amortizat şi este excitat cu semnal de tip treaptă, răspunsul sistemului ar putea avea oscilații. În astfel de cazuri este util să se introducă un filtru post eşantionare care să netezească semnalul înainte de a-l aplica elementului de execuție. Alteori acest obiectiv poate fi atins prin modificări ale dinamicii elementului de execuție.

Întârzierea datorată calculelor

Deoarece atât conversiile A - N şi N - A cât şi calculele din algoritmul de reglare necesită timp, întotdeauna va exista o întârziere la implementarea pe calculator a unei legi de reglare. Această întârziere, numită şi întârziere computațională, depinde de modul în care este implementat algoritmul de reglare. Există două moduri diferite de implementare, conform fig.11.4.

În cazul (a) mărimea măsurată la momentul t_k este folosită pentru calculul mărimii de comandă ce va fi aplicată la momentul t_{k+1}. O altă posibilitate, cazul (b), este de a citi variabilele măsurate la momentul t_k şi de a face conversia N-A cît mai repede posibil.

Dezavantajul în cazul (a) este acela că mărimile de comandă sunt întârziate nejustificat.

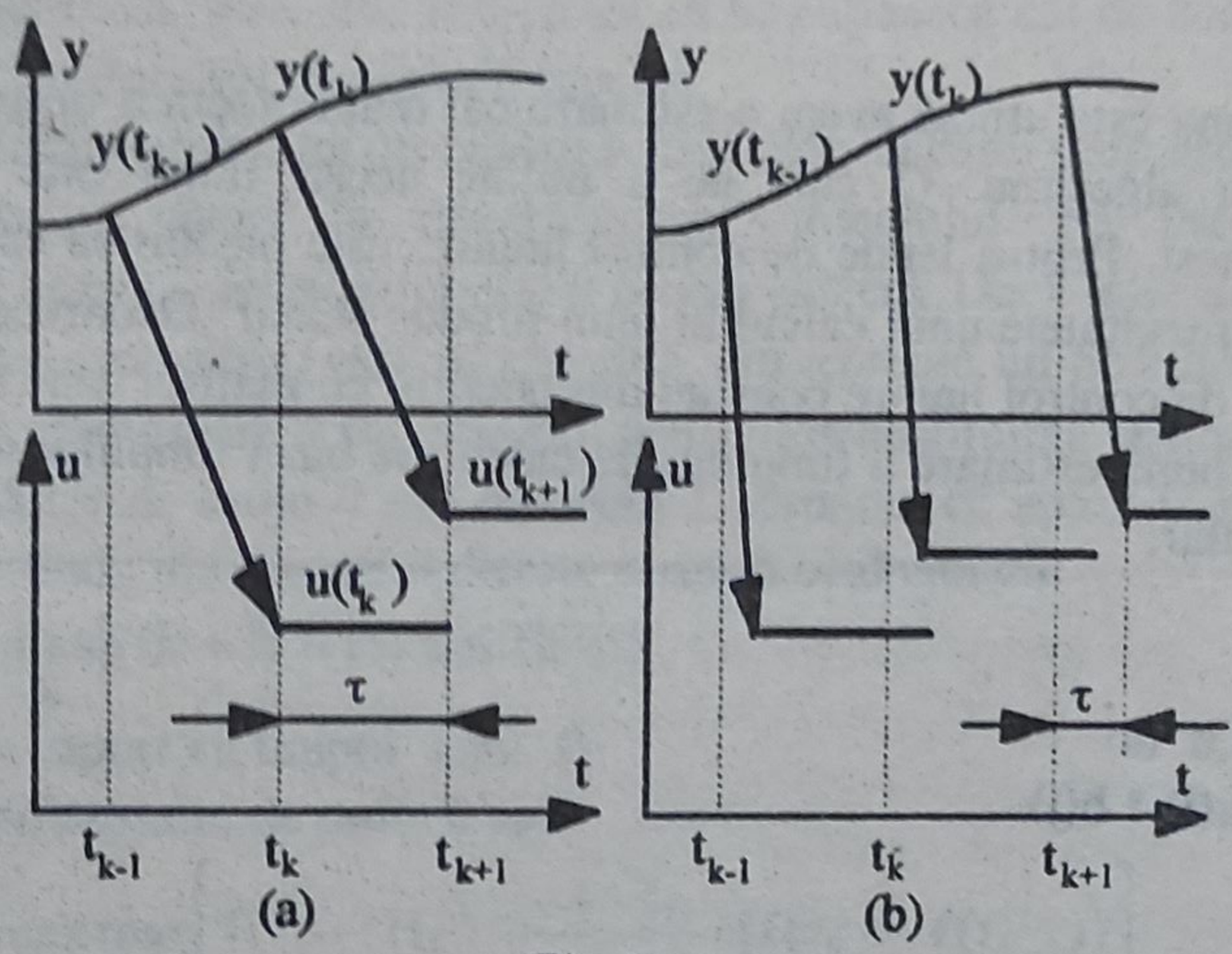


Fig.11.4

Dezavantajul în cazul (b) constă în aceea că durata întârzierii depinde de tipul convertoarelor şi modul în care a fost făcută programarea.

În ambele cazuri este necesar să se ţină cont de întârzierea care apare datorită calculului legii de reglare. Acest lucru poate fi făcut uşor incluzând un timp mort T (cazul a) sau τ (cazul b) în modelul procesului. O regulă de care trebuie să se ţină cont este de a citi intrările înainte de a trimite mărimile de comandă către ieşiri. Procedând astfel este eliminat riscul de a avea interinfluenţă electrică.

În cazul (b) este de dorit să se scurteze cât mai mult posibil întârzierea τ. Acest deziderat poate fi atins făcând cât mai puţine operaţii între o conversie A-N şi una N-A.

Considerând rutina discutată anterior, deoarece comanda u este disponibilă după execuţia liniei 2 de program, conversia N-A poate fi făcută înainte de actualizarea stărilor. Întârzierea poate fi redusă şi mai mult calculând C * x după conversia N-A.

Algoritmul modificat rezultă astfel în forma:

1. inport y, r
2. u: = u_1 + D * y +D_r * r
3. outport u
4. x: = F * x + G * y +G_r * r
5. u_1 = C * x.

Întotdeauna este util să avem o estimare cât mai corectă a timpului de calcul pentru diverşi algoritmi. O cale de a obține aceşti timpi este rularea unor programe de test. Pentru legile de control liniare, este posibil să estimăm timpul de calcul din rezultatele unui calcul al unui produs scalar. Deoarece operațiile de bază în legile de control liniare constau din operații cu matrici, este adesea posibil să obținem o bună estimare a timpului de calcul pe baza timpului necesar pentru un produs scalar:

```
S = 0
for i = 1,n  do
S = S +a(i) * b(j)
end.
```

Pe microcomputerele simple, ce nu posedă aritmetică în virgulă mobilă, va exista o diferență substanțială între calculul în virgulă fixă şi virgulă mobilă. Această diferență este mult mai redusă dacă calculatorul este prevăzut cu unitate hardware pentru calcule în virgulă mobilă.

Pentru a putea aprecia consecințele întârzierii computaționale este util de ştiut senzitivitatea sistemului în buclă închisă în raport cu timpul mort (întârzierea pură). Aceasta poate fi evaluată pe locul rădăcinilor în raport cu timpul mort. O metodă simplă de apreciere este de a evalua cât de mult se modifică polii sistemului în buclă închisă când este introdusă o întârziere de o perioadă de eşantionare.

11.2. Alegerea perioade de eşantionare

Alegerea perioadei de eşantionare în sistemele discrete este o problemă fundamentală. Alegerea corectă a acesteia este dependentă de proprietățile semnalului, metoda de extrapolare şi de scopul sistemului. Într-o problemă pură

de procesare de semnal, scopul este de a înregistra digital semnalul şi de a-l reconstitui ulterior din eşantioanele sale. Un criteriu rezonabil în acest caz pentru selecția ratei de eşantionare ar putea fi mărimea erorii dintre semnalul original şi semnalul reconstituit prin extrapolare din eşantioanele sale.

Teorema eşantionării a lui Shannon furnizează o regulă foarte simplă în cazul ideal în care un timp mort mare în reconstituirea semnalului poate fi acceptat şi în conținutul frecvențelor semnalului limitat la o anumită bandă de frecvență. În practică, însă, este important să se cunoască cât de contaminat : pot fi semnalele de perturbații de înaltă frecvență.

Să considerăm problema procesării semnalelor, al cărei scop este exprimat în termenii erorii ce apare în reconstituirea semnalului. Să presupunem că transformata Fourier a semnalului este 0 pentru $|\omega| \geq \omega_0$. Dacă întârzierea ce apare în reconstituirea semnalului este acceptabilă, din teorema lui Shannon rezultă că o frecvență de eşantionare $2\ \omega_0$ este suficientă. Reconstituirea semnalului se face cu un extrapolator de ordin 0 sau de ordin 1. Eroarea ce apare la reconstituirea semnalului continuu din semnalul discret poate fi evaluată cu

$$l_{Eh_0} = \max_k \left| f(k+1) - f(k) \right| \leq T \left| f'(t) \right| \tag{11.8}$$

(f' - derivata în raport cu timpul a lui f)
în cazul extrapolatorului de ordin 0 sau

$$l_{Eh_1} = \max_k \max_t \left[f(t) - f(t_k) - \frac{t - t_k}{t_k - t_{k-1}} \left(f(t_k) - f(t_{k-1}) \right) \right] \tag{11.9}$$

$$l_{Eh_1} \leq T^2 \left| f''(t) \right| \tag{11.10}$$

în cazul extrapolatorului de ordin 1.

Să presupunem că semnalul analizat este $f(t) = \sin \omega t$. Erorile maxime vârf la vârf ce pot apare în cazul utilizării pentru reconstituirea semnalului a extrapolatorului de ordin 0 sau 1 sunt date de:

$$l_{Eh_0} = \frac{\omega T}{2} = \frac{\pi}{N} \tag{11.11}$$

$$l_{Eh_1} = \frac{(\omega T)^2}{2} = \frac{2\pi^2}{N^2} \tag{11.12}$$

unde N este numărul de eşantioane pe o perioadă a funcției sin ωt.

Un set de valori este prezentat în tabelul 11.1.

Eşantioane pe perioadă	Eroarea maximă relativă	
N	Eh_0	Eh_1
2	1,5	2,5
5	0,6	0,8
10	0,3	0,19
20	0,15	0,05
50	0,06	0,008
100	0,03	0,002
200	0,015	$5 \cdot 10^{-4}$
500	0,006	$8 \cdot 10^{-5}$

Tabelul 11.1

Pentru a obține o eroare relativă ≈ 1% cu extrapolatorul de ordin 0 sunt necesare aproximativ 300 de eşantioane pe o perioadă. Se observă că utilizarea extrapolatorului de ordin 1 are efecte semnificativ mai bune (N mai mic decât 50).

Din cele expuse rezultă că frecvența de eşantionare mare, de câteva sute de ori mai mare decât frecvența semnalului, este justificată în cazul aplicațiilor de procesare de semnal.

Pentru sistemele de control în buclă închisă, o alegere judicioasă a perioadei de eşantionare trebuie să se bazeze pe înțelegerea influenței pe care aceasta o are asupra sistemului de control. Este rațional să se considere că cea mai mare frecvență ce prezintă interes trebuie să fie banda de trecere a sistemului în buclă închisă. Frecvențele de eşantionare uzuale sunt 10 până la 30 de ori frecvența benzii de trecere (ω_B) sau perioada de eşantionare este 1/4 până la 1/10 din timpul de ridicare al sistemului în buclă închisă, ceea ce poate părea puțin în comparație cu problema procesării semnalelor discutată anterior. În comparație cu acest caz, în problemele de control se pot utiliza frecvențe de eşantionare mai coborâte din cauză că cele mai multe procese au o dinamică de tip filtru trece-jos şi de obicei constantele lor de timp sunt mai mari decât durata regimului tranzitoriu a buclei închise. Efectul asupra ieşirii sistemului a unei perioade de eşantionare depinde de aria impulsului aplicat la intrarea în proces; procesul este de regulă aproape insenzitiv la forma impulsului.

11.3. Elementele de execuție neliniare

Toate metodele de proiectare din capitolele anterioare se bazează pe faptul că procesul poate fi descris printr-un model liniar. Deşi teoria sistemelor liniare are

un câmp larg de aplicabilitate, în sistemele reale apar adesea unele neliniarități de care trebuie să se țină cont. De exemplu, adesea se întâmplă ca elementele de execuție să fie neliniare, ca în fig.14.5.

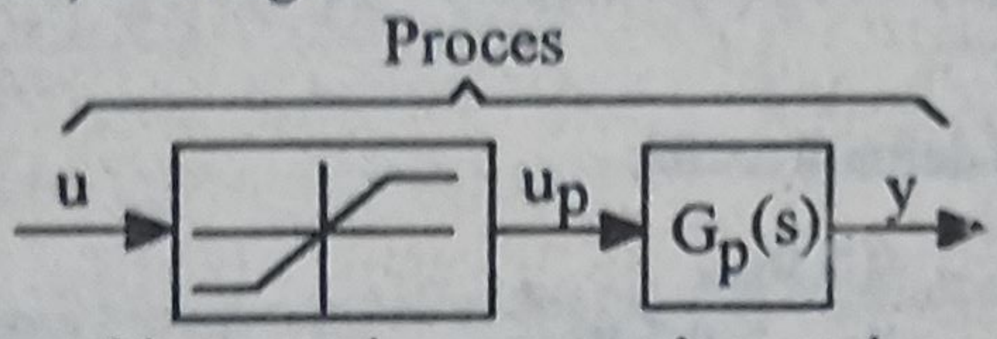


Fig.14.5 Schema bloc a unui proces cu element de execuție neliniar având caracteristica de tip element cu saturație

Valvele sunt elemente de execuție des întâlnite în sistemele de control automat. Ele prezintă o neliniaritate de tip saturație în care limitele corespund pozițiilor complet închis şi complet deschis ale valvei. Între cele 2 limite de saturație comportarea elementului de execuție de tip valvă poate fi apoximată ca fiind liniară. Neliniaritatea este deci importantă când se produc variații mari ale comenzii. De asemenea pot apare dificultăți la pornirea şi la oprirea sistemului.

Calea normală de a trata neliniaritatea ar fi de a dezvolta o teorie de proiectare care să țină cont de prezența neliniarității. Acest lucru poate fi făcut cu ajutorul teoriei controlului optimal, dar metoda de proiectare care rezultă este destul de complicată.

Legea de reglare obținută este, de asemenea, complicată. De aceea se obişnuieşte să se utilizeze metode simple euristice.

Dificultățile pot apare din cauză că regulatorul este un sistem dinamic. Când mărimea de comandă u se saturează, este necesar să ne asigurăm că starea regulatorului se comportă adecvat.

Să considerăm pentru început cazul unei legi de reglare obținută cu un observer combinat cu o reacție după stare. Regulatorul este un sistem dinamic, ale cărui stări, $\hat{x}$ în ecuația (11.1), sunt reprezentate de stările estimate ale procesului. Estimatorul din (11.1) va furniza stările estimate corecte dacă variabila comandă u în ecuația (11.1) este aleasă ca mărimea de comandă a părții liniare a procesului u_p. Dacă limitele de saturație sunt cunoscute (măsurate anterior), starea estimată furnizată de (11.1) va fi corectă chiar dacă mărimea de comandă se saturează. Dacă ieşirea elementului de execuție nu este măsurată poate fi estimată pe baza caracteristicilor neliniare ale acestuia. Pentru cazul simplu al unui element de execuție cu saturație (fig.14.5), legea de reglare din 11.1 poate fi scrisă astfel:

$$u_p(k) = \text{satu}(k) = -L\hat{x}(k) + r(k)$$
$$\hat{x}(k+1) = \phi\hat{x}(k) + \Gamma u_p(k) + H\big(y(k) - \hat{y}(k)\big) \tag{11.13}$$
$$\hat{y}(k) = C\hat{x}(k)$$

unde funcția sat este definită astfel:

$$\text{sat } u = \begin{cases} u_{low} & u \le u_{low} \\ u & u_{low} \le u \le u_{high} \\ u_{high} & u \ge u_{high} \end{cases} \tag{11.14}$$

pentru u scalar și

$$\text{sat } u = \begin{bmatrix} \text{sat } u_1 \\ \text{sat } u_2 \\ \vdots \\ \text{sat } u_n \end{bmatrix} \tag{11.15}$$

pentru cazul când u este un vector. Valorile u_{low} și u_{high} sunt alese să corespundă limitelor de saturație ale elementului de execuție.

Procedând în acest mod $\hat{x}$ va fi o estimare corectă a stărilor procesului condus chiar când elementul de execuție se saturează, cu condiția ca u_{low} și u_{high} să fie bine alese.

Aceeași problemă poate fi discutată și pentru cazul regulatoarelor în reprezentarea intrare-ieșire, de tipul celui din ecuația 11.6. În acest caz problema este de a rescrie ecuația regulatorului 11.6 astfel încât să arate ca un sistem dinamic cu dinamica observerului indusă de cele trei intrări: referința r, ieșirea procesului y și mărimea de comandă. Pentru aceasta se alege $A_0(z^{-1})$ polinomul caracteristic dorit al observerului. Adăugând $A_0(z^{-1})U(z)$ în ambii membri ai ecuației (11.6) rezultă:

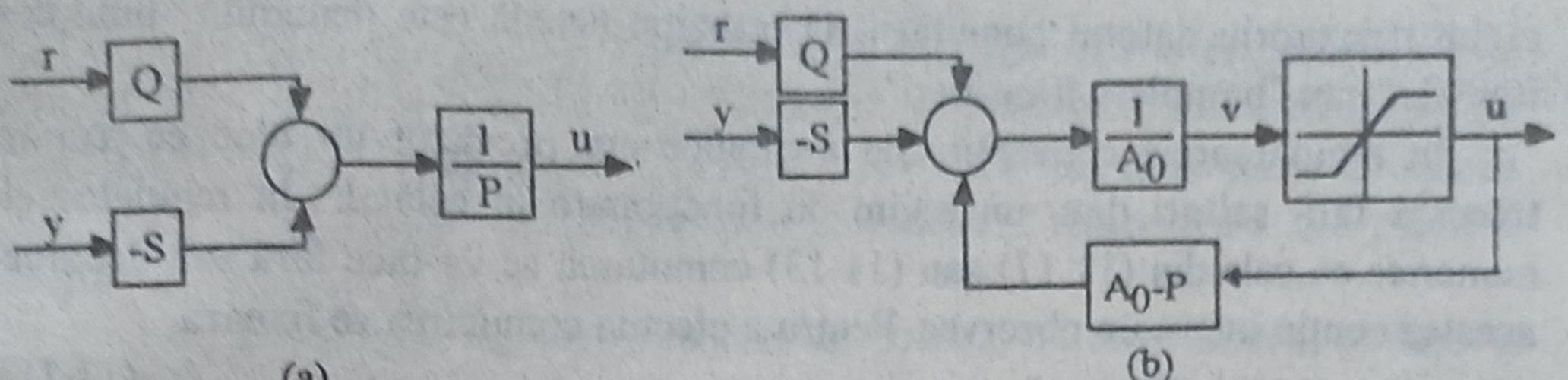
$$A_0(z^{-1})U(z) = Q(z^{-1})R(z) - S(z^{-1})Y(z) + \Big(A_0(z^{-1}) - P(z^{-1})\Big)U(z). \tag{11.16}$$

Un regulator cu compensare antisaturație (antiwindup) este dat de:

$$\begin{cases} A_0 v = Qr - Sy + (A_0 - P)u \\ u = \text{sat } v. \end{cases} \tag{11.17}$$

Regulatorul este echivalent cu cel din (11.6) când nu se saturează. Când însă se saturează poate fi privit ca un observer cu dinamica dată de polinomul A_0.

O diagramă bloc a regulatorului liniar (11.6) și a modificării neliniare ce evită saturația (11.17) este prezentată sub formă de schemă bloc în fig.11.6.



(a) (b)

Fig.11.6 Schema bloc a regulatorului (a) şi a regulatorului modificat (b)

11.4. Aspecte operaționale

Această secțiune este destinată discuției interfeței regulatorului cu operatorul uman. Această discuție include o evaluare a informației afişate de regulator şi mecanismelor prin care operatorul poate schimba parametrii regulatorului. În cazul regulatoarelor analogice convenționale era afişată eroarea, referința şi ieşirea măsurată. Regulatorul putea fi comutat din regim automat în regim manual şi invers. Operatorul putea modifica factorul de amplificare (banda de proporționalitate), timpul de integrare şi timpul de derivare. Această organizare era determinată de tipul regulatoarelor analogice (PID). Când se utilizează echipamente de calcul numeric pentru implementarea regulatoarelor sunt mult mai multe posibilități.

Moduri de operare

Adesea este de dorit să avem posibilitatea de a controla manual procesul. O metodă simplă pentru a face aceasta este dată în fig.11.7.

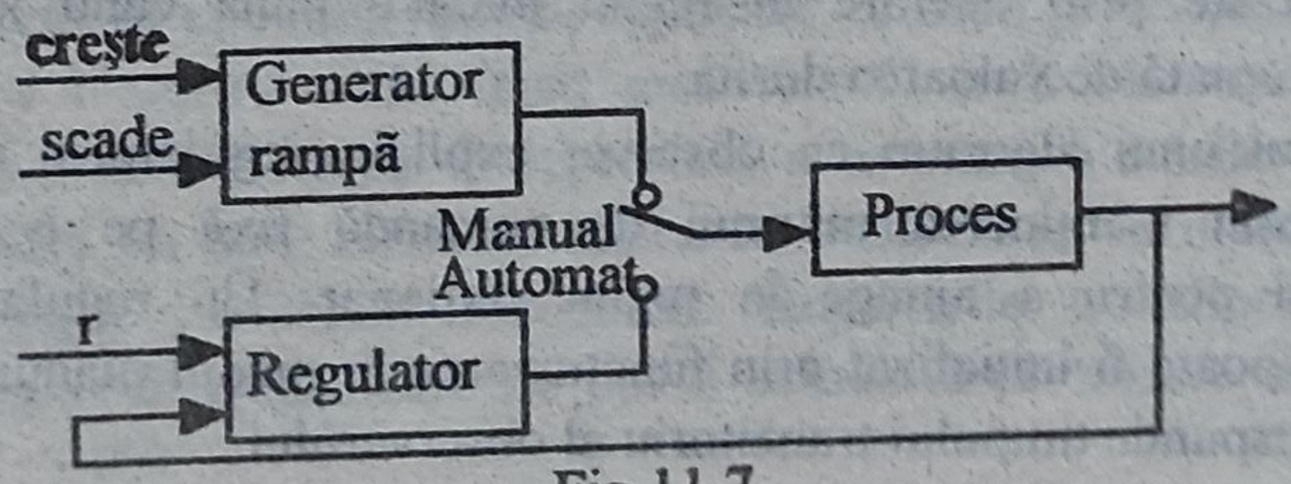


Fig.11.7

Controlul manual este asigurat de la panoul frontal prin butoane pentru creşterea sau scăderea mărimii de comandă.

Regulatorul fiind un sistem dinamic, stările regulatorului trebuie să aibă anumite valori în momentul comutării manual-automat. Dacă nu, va urma un

regim tranzitoriu datorat comutării. O tranziție netedă este denumită "bumpless transfer" sau "bumpless transition".

În regulatoarele convenționale analogice era prevăzut un bloc ce asigura trecerea fără salturi dintr-un regim de funcționare în celălalt. În regulatoarele numerice ca cele din (11.17) sau (11.13) comutarea se va face fără salt deoarece acestea conțin intern un observer. Pentru a efectua comutarea se fixează

$$u_{low} = u_{high} = u_{manual} \tag{11.18}$$

Aceasta implică faptul că mărimea de comandă u este întotdeauna egală cu semnalul de comandă furnizat de operator. Stările regulatorului se vor modifica automat datorită reacției negative interne a regulatorului. Saturația introdusă în regulator pentru a ține cont de saturația elementului de execuție va asigura automat și comutarea netedă.

Folosind echipamente de calcul numeric în control este posibil să introducem mai multe moduri de operare suplimentare. De exemplu, se poate introduce proiectarea algoritmului și estimarea parametrilor procesului în regulator. În modul de operare *estimare* va fi estimat un model al procesului. Acest model poate fi folosit ulterior pentru proiectarea algoritmului de reglare și fixarea valorilor parametrilor regulatorului într-un alt mod de operare, numit *acordare*. Poate fi introdus și un mod de operare *adaptiv*, în care parametrii sunt actualizați continuu.

Inițializarea

Regulatorul fiind un sistem dinamic, este important ca stările acestuia să se comporte adecvat la pornire (punere sub tensiune). Dacă nu se întâmplă așa, pot apare regimuri tranzitorii de durată mare. Regulatoarele convenționale analogice erau inițializate prin operare în regim manual până când ieșirea sistemului devenea apropiată de valoarea dorită.

În cazul unui algoritm cu observer explicit, regulatorul numeric poate fi inițializat prin menținerea mărimii de comandă fixă pe o durată necesară observerului pentru a ajunge în regim staționar. Un regulator prevăzut cu antiwindup poate fi inițializat prin funcționarea în modul manual pe o durată de timp ce corespunde timpului tranzitoriu al observerului.

Parametrizarea și modificarea parametrilor

La regulatoarele convenționale, operatorul putea modifica referința și parametrii de bază ai legii de reglare (amplificarea, timpul de integrare și timpul de derivare). La regulatoarele numerice, există multe alte posibilități. Datorită

uşurinței de a efectua calcule, este posibil să se folosească o parametrizare în algoritmul de reglare şi o alta în comunicarea cu operatorul. Parametrii afişați pe panoul frontal pot fi legați de performanța sistemului, mai mult decât de detalii ale algoritmului de reglare. Conversia între parametri se realizează intern printr-o rutină.

Există două probleme operaționale cu privire la modificarea on-line a parametrilor. Prima este legată de programarea în timp real. Datele ce reprezintă parametrii sunt împărțite între diferite programe. Rezultă că este necesar să ne asigurăm că un program nu utilizează date ce au fost modificate de un alt program. Cea de-a doua problemă este de natură algoritmică.

Să considerăm un algoritm simplu de tip PI.

$l: = r - y$
$u: = K *(e + i/T_i)$
$i: = i + e * T.$

Este clar că o modificare a timpului de integrare T_i va conduce la un alt salt treaptă a mărimii de comandă, cu excepția ca i (componenta integrală) să fie 0.

Problema poate fi evitată modificând starea i la $i * T_i/T'_i$, unde T'_i este noua valoare a timpului de integrare. O altă cale este de a rescrie algoritmul astfel:

$l: = r - y$
$u: = K * e + i$
$i: = i + K * e * T/T_i.$

În cazul general, al unui algoritm cu estimator de stare şi reacție după stare, trebuie obținută o realizare astfel încât matricele C şi D să nu depindă de parametrii ajustabili. Dacă starea $\hat{x}$ reprezintă o estimare a stărilor fizice ale procesului, dificultăți nu apar deoarece starea estimată nu se va modifica brusc când sunt modificați parametrii modelului. Regimurile tranzitorii datorate modificării factorului de amplificare nu pot fi evitate dacă eroarea de estimare este nenulă $e = x - \hat{x} \neq 0$.

Este mai greu de spus ce ar trebui făcut pentru un regulator numeric în reprezentarea intrare-ieşire. De obicei, utilizând astfel de reprezentări, vor exista regimuri tranzitorii datorate modificărilor parametrilor algoritmului de reglare.

11.5. Aspecte numerice

Când se implementează un algoritm de control discret trebuie să se cunoască:

- cât de precise trebuie să fie convertoarele;
- ce precizie de calcul trebuie asigurată;
- calculul trebuie făcut în virgulă fixă sau în virgulă mobilă?

Pentru a răspunde trebuie să înțelegem efectul limitărilor şi să apreciem consecințele acestora asupra sistemului în buclă închisă. Problema este complicată deoarece depinde de interacțiunea complexă dintre reacția negativă, algoritmul de reglare şi perioada de eşantionare.

Sursele de erori majore în sistemele discrete sunt:

- cuantizarea în convertoarele A-N,
- cuantizarea parametrilor,
- rotunjiri şi overflow în operațiile de adunare, scădere, înmulțire, împărțire şi alte operații,
- cuantizarea în convertoarele N-A.

Convertoarele uzuale A-N au lungimea cuvântului de 8, 10, 12, 14 sau 16 biți, ceea ce corespunde la o rezoluție (eroare de cuantizare) de 0,4%, 0,1%, 0,25%, 0,06% şi 0,0015%. Convertoarele N-A au o precizie limitată (de obicei până la 12 biți). Eroarea datorată cuantizării parametrilor depinde foarte mult de alegerea perioadei de eşantionare şi de modul în care este implementată legea de reglare numerică.

Cu privire la lungimea cuvântului cu care se execută calcule în cadrul algoritmului numeric de control, microcomputerele sau minicomputerele utilizate au lungimea cuvântului de 8, 16 sau 32 de biți.

În ultimul timp este în creştere numărul aplicațiilor ce utilizează circuite VLSI de uz special. De asemenea procesoarele pentru procesarea semnalelor (DSP) sunt utilizate curent în implementarea sistemelor automate discrete când este necesară o perioadă mică de eşantionare.

Procesoarele de semnal de cost scăzut fac doar calcule în virgulă fixă şi lungimea cuvântului de 16 biți.

Există mai multe reprezentări ale numerelor în calculatoarele numerice. IEEE a luat inițiativa de a le standardiza şi standardul ANSI-IEEE 754 a fost publicat în 1985. În acest standard numerele sunt reprezentate în forma $\pm a \cdot 2^b$ unde $0 \le a < 2$ este mantisa şi b este exponentul. Standardul IEEE a căpătat acceptare generală şi chip-urile Inter şi Motorola se bazează pe acesta. Pentru a evita eventualele dificultăți numerice, atunci când este posibil, toate calculele se

vor efectua în dublă precizie şi apoi rezultatele vor fi trunchiate la simplă precizie sau întregi. De notat că instrucțiunea de înmulțire la multe calculatoare este implementată astfel încât rezultatul se obține în dublă precizie. În general, rotunjirea şi cuantizarea conduc la erori mici, în timp ce efectele overflow-ului sunt dezastruoase.

În literatură există unele recomandări cu privire la selecția rezoluției convertoarelor. Rezoluția convertoarelor A-N trebuie aleasă astfel încât să fie cel puțin egală cu precizia dorită pentru ieşirea sistemului. Se poate investiga când cuantizarea poate da naştere unor cicluri limită oscilatorii.

De asemenea, trebuie verificată amplitudinea riplului în semnalul de comandă datorat cuantizării în convertorul A-N.

Pentru a determina rezoluția cerută pentru convertorul N-A, trebuie determinată mai întâi frecvența unui posibil ciclu limită. Dacă există o oscilație datorată unui ciclu limită, amplitudinea poate fi determinată grosier din amplificarea procesului şi frecvența oscilației. Este recomandată simularea pentru a obține rezultate mai precise. Procedura poate fi ilustrată printr-un exemplu. Să considerăm un sistem de tip dublu integrator. Să presupunem că ieşirea procesului este în gama [-1,1] şi mărimea semnalului de comandă în gama [-0,04, 0,04] şi se doreşte ca precizia ieşirii măsurate să fie sub 1%. Dacă considerăm că fiecare convertor contribuie cu o eroare de 0,5%, convertorul A-N trebuie să aibă o rezoluție de 0,005, ceea ce este echivalent cu o lungime a cuvântului de 9 biți $\left(\frac{1}{2^9}=\frac{1}{512}\approx 0{,}002\right)$.

Deoarece amplificarea procesului pe un ciclu limită este de aproximativ 15, rezoluția convertorului N-A trebuie să fie mai bună de 0,00033.

Ținând cont de gama mărimii de comandă aceasta corespunde la $\frac{0{,}00033}{0{,}018}\approx\frac{1}{240}$, ceea ce corespunde unui convertor de 8 biți $\left(\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256}\approx 0{,}004\right)$.

Anexa 1

Tabela transformatelor Laplace şi z

Transformata Laplace: X(s)	Transformata z: X(z)
1	1
e^{-nTs}	z^{-n}
$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{2!}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\frac{(n-1)!}{s^n}$	$\lim_{a\to 0}(-1)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{z}{z-e^{-bT}}\right]$
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-aT})z}{a(z-1)(z-e^{-aT})}\right]$
$\frac{s+b}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left[\frac{bTz}{(z-1)^2}+\frac{(a-b)(1-e^{-aT})z}{a(z-1)(z-e^{-aT})}\right]$

$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab}\left[\frac{z}{z-1}+\frac{bz}{(a-b)(z-e^{-aT})}-\frac{az}{(a-b)(z-e^{-bT})}\right]$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{1}{s^3(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left[\frac{T^2z}{(z-1)^3}+\frac{(aT-2)Tz}{2a(z-1)^2}+\frac{z}{a^2(z-1)}-\frac{z}{a^2(z-e^{-aT})}\right]$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{z\,sha T}{z^2-2z\,cha T+1}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{z(z-cha T)}{z^2-2z\,cha T+1}$
$\frac{a}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-2z\cos aT+1}\right]$
$\frac{a^2}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{1}{a}\frac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{aTe^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}\right]$
$\frac{1}{s^2(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^3}\left[\frac{(aT+2)z-2z^2}{(z-1)^2}+\frac{2z}{z-e^{-aT}}+\frac{aTe^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}\right]$
$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}\left[\frac{ze^{-aT}\sin bT}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}\right]$

$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos bT}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$
$\frac{1}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z^2-ze^{-aT}\sec\Phi\cos(bT-\Phi)}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}\right]$

Funcțiile de transfer în z cu și fără extrapolator de ordin 0

G(s)	G(z)=Z{G(s)}	$HG(z)=\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$
$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{T_0}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$	$\frac{T_0^2(z+1)}{2(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T_0^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\frac{T_0^3(z^2+4z+1)}{6(z-1)^3}$
$\frac{1}{s^4}$	$\frac{T_0^3 z(z^2+4z+1)}{6(z-1)^4}$	$\frac{T_0^4(z^3+11z^2+11z+1)}{24(z-1)^4}$
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_0}}$	$\frac{(1-e^{-aT_0})}{a(z-e^{-aT_0})}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{T_0 z e^{-aT_0}}{(z-e^{-aT_0})^2}$	$\frac{(1-e^{-aT_0}(1+aT_0))z+e^{-aT_0}(e^{-aT_0}-1+aT_0)}{a^2(z-e^{-aT_0})^2}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}\frac{(e^{-aT_0}-e^{-bT_0})z}{(z-e^{-aT_0})(z-e^{-bT_0})}$	$\frac{1}{ab(a-b)}\frac{(Az+B)}{(z-e^{-aT_0})(z-e^{-bT_0})}$ $A=a-b-ae^{-bT_0}+be^{-aT_0}$ $B=(a-b)e^{-(a+b)T_0}-ae^{-aT_0}+be^{-bT_0}$

Anexa 2

Tabele transformatelor Laplace şi z modificate

X(s)	X(z,m)
1	0
e^{-nTs}	z^{-n-1+m}
$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{mT}{z-1}+\frac{T}{(z-1)^2}$
$\frac{2!}{s^3}$	$T^2\left[\frac{m^2}{z-1}+\frac{2m+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}\right]$
$\frac{(n-1)!}{s^n}$	$\lim_{a\to 0}(-1)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right]$
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}-\frac{e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}\right]$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right]$
$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left[\frac{T}{(z-1)^2}+\frac{amT-1}{a(z-1)}+\frac{e^{-amT}}{a(z-e^{-aT})}\right]$
$\frac{s+b}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left[\frac{bT}{(z-1)^2}+(bmT+1-\frac{b}{a})\frac{1}{z-1}+\frac{b-a}{a}\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right]$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab}\left[\frac{1}{z-1}+\frac{be^{-amT}}{(a-b)(z-e^{-aT})}-\frac{ae^{-bmT}}{(a-b)(z-e^{-bT})}\right]$

$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Te^{-amT}\left[e^{-aT}+m(z-e^{-aT})\right]}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{1}{s^3(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left[\frac{T^2}{(z-1)^3}+\frac{T^2(m+\frac{1}{2})-\frac{T}{a}}{(z-1)^2}+\frac{(amT)^2/2-amT+1}{a^2(z-1)}-\frac{e^{-amT}}{a^2(z-e^{-aT})}\right]$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{z\sin amT+\sin(1-m)aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{z\cos amT-\cos(1-m)aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{z\sinh amT+\sinh(1-m)aT}{z^2-2z\cosh aT+1}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{z\cosh amT-\cosh(1-m)aT}{z^2-2z\cosh aT+1}$
$\frac{a}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{z\cos amT-\cos(1-m)aT}{z^2-2z\cos aT+1}\right]$
$\frac{a^2}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{mT}{z-1}+\frac{T}{(z-1)^2}-\frac{z\sin amT+\sin(1-m)aT}{a(z^2-2z\cos aT+1)}$
$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{z-1}-\left(\frac{1+amT}{z-e^{-aT}}+\frac{aTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}\right)e^{-amT}\right]$
$\frac{1}{s^2(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^3}\left[\frac{aT}{(z-1)^2}+\frac{amT-2}{z-1}+\left(\frac{aTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}-\frac{amT-2}{z-e^{-aT}}\right)e^{-amT}\right]$
$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}\frac{e^{-amT}\left[z\sin bmT+e^{-aT}\sin(1-m)bT\right]}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{e^{-amT}\left[z\cos bmT+e^{-aT}\sin(1-m)bT\right]}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}$

$\frac{1}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{e^{-amT}\sec\Phi\{z\cos(bmT+\Phi)-e^{-aT}\cos[(1-b)bT-\Phi]\}}{z^2-2ze^{-aT}\cos bT+e^{-2aT}}\right]$ $\Phi=\operatorname{arctg}\left(-\frac{a}{b}\right)$

Anexa 3

Tabela transformatelor Laplace şi $w = \frac{z-1}{z+1}$

Tr. Laplace X(s)	Transformata w: X(w)
$ths\,T/2$	w
e^{Ts}	$\frac{1+w}{1-w}$
$1-e^{-Ts}$	$\frac{2w}{1+w}$
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{cthaT}{2}\right)\frac{1+w}{1+wcthaT/2}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{T}{2^2}\left(cth^2\frac{aT}{2}-1\right)\frac{1-w^2}{(1+wcthaT/2)^2}$
$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{T^2}{2^3}\left(cth^2\frac{aT}{2}-1\right)\frac{(1-w^2)(w+cthaT/2)}{(1+wcthaT/2)^3}$
$\frac{1}{(s+a)^4}$	$\frac{T^3}{2^4}\left(cth^2\frac{aT}{2}-1\right)\frac{1-w^2}{(1+wcthaT/2)^4}\left[-\frac{1}{3}+\frac{4w}{3}+w^2+\left(1-\frac{w^2}{3}\right)cth^2\frac{aT}{2}\right]$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$-\frac{1}{2a}\frac{(1-w^2)cthaT/2}{(1-w^2cth^2aT/2)}$
$1/s$	$(1+w)/2w$
$1/s^2$	$\frac{T(1-w^2)}{2^2w^2}$
$1/s^3$	$\frac{T^2(1-w^2)}{2^3w^3}$

$1/s^4$	$\frac{T^3(1-w^2)}{2^4 w^4}\left[1-\frac{1}{3}w^2\right]$
$1/s^5$	$\frac{T^4(1-w^2)}{2^5 w^5}\left[-\frac{2}{3}w^2\right]$
$1/s^6$	$\frac{T^5(1-w^2)}{2^6 w^6}\left[1-w^2+\frac{2}{15}w^4\right]$
$1/s^7$	$\frac{T^6(1-w^2)}{2^7 w^7}\left[1-\frac{4}{3}w^2+\frac{17}{45}w^4\right]$
$1/s^8$	$\frac{T^7(1-w^2)}{2^8 w^8}\left[1-\frac{5}{3}w^2+\frac{11}{15}w^4-\frac{17}{315}w^6\right]$
$1/s^9$	$\frac{T^8(1-w^2)}{2^9 w^9}\left[1-2w^2+\frac{6}{5}w^4-\frac{62}{315}w^6\right]$
$1/s^{10}$	$\frac{T^9(1-w^2)}{2^{10} w^{10}}\left[1-\frac{7}{2}w^2+\frac{16}{9}w^4-\frac{88}{189}w^6+\frac{62}{2835}w^8\right]$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{1-w^2}{2w(1+wcthaT/2)}$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{T(1-w^2)}{2^2 w^2}\left[1-\frac{2w}{aT(1+wcthaT/2)}\right]$
$\frac{a}{s^3(s+a)}$	$\frac{T^2(1-w^2)}{2^3 w^3}\left[1-\frac{2}{aT}w+\frac{4w^2}{(aT)^2(1+wcthaT/2)}\right]$
$\frac{a}{s^4(s+a)}$	$\frac{T^3(1-w^2)}{2^4 w^4}\left[1-\frac{2}{aT}w+\left(\frac{4}{(aT)^2}-\frac{1}{3}\right)w^2-\frac{8w^3}{(aT)^3(1+wcthaT/2)}\right]$
$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{2}\frac{(1-w^2)\sin bT}{(chaT-\cos bT)+2wshaT+w^2(chaT+\cos bT)}$

$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{2}\frac{(1+w)[e^{aT}(1+w)-\cos bT(1-w)]}{(chaT-\cos bT)+2w\,shaT+w^2(chaT+\cos bT)}$
$\frac{a^2}{s^2(s^2-a^2)}$	$-\frac{T(1-w^2)}{2^2w^2}\left[1+\frac{2(cthaT/2)w^2}{aT(1-w^2cth^2aT/2)}\right]$
$\frac{a^2}{s^4(s^2-a^2)}$	$-\frac{T^3(1-w^2)}{2^4w^4}\left[1+\left(\frac{4}{(aT)^2}-\frac{1}{3}\right)w^2+\frac{8(cthaT/2)w^4}{(aT)^3(1-w^2cth^2aT/2)}\right]$
$\frac{a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{T(1+shaT/aT)(cth^2aT/2-1)(1-w^2)}{2^3(1-w^2cth^2aT/2)^2}\times$ $\times\left[1+\frac{aT-shaT}{aT+shaT}(cthaT/2)^2w^2\right]$

Bibliografie

1. Astrom, K. J., Wittenmark, B.: *Computer Controlled Systems,* Englewood-Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 1984.

2. Astrom, K. J., Wittenmark, B.: *Computer Controlled Systems,Second Edition,* Englewood-Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 1990.

3. Astrom, K. J., Hagander, P., Sternby, J.: *Zeros of Sampled Systems,* Proc. of the 19th IEEE Conf. on Decision and Control, Albuquerque, USA, pag. 1077-1081.

4. Bellman R.: *Dynamic Programming,* Princepton University Press, Princeptor New Jersey, 1957.

5. Călin, S., Petrescu, Gh., Tăbuş, I.: *Sisteme automate cu eşantionare,* Editur Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1984.

6. Călin, S., Dumitrache, I., Nitu, C., Munteanu, F., Iorga, V., Dumitriu, S *Reglarea numerică a proceselor tehnologice,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1984

7. Călin, S.: *Regulatoare numerice,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşt 1988.

8. Dumitrache, I., Călin, S., Boţan, C., Nitu, C.: *Automatizări şi echipament electronice,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982.

9. Franklin, G., Powell, D.: *Digital Control of Dynamic Systems,* Addison-Wesley Reading, Massachuttes, 1980.

10. Franklin, G., Powell, D.: *Digital Control of Dynamic Systems,* Addison-Wesley, Reading, Massachuttes, 1989.

11. Foulard, C., Gentil, S., Sandraz, J. P.: *Commande et régulation par calculateur numerique, Cinquieme édition, revue et augmentée,* Eyrolles, Paris, 1987.

12. Ganciu, T.: *Identificarea sistemelor,* Editura Nord-Est, Iaşi, 1986.

13.Goodwin, G. C., Sin, K. S.: *Adaptive Filtering, Prediction and Control,* Englewood-Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 1984.

14.Gould, L. A.: *Chemical Process Control,* Addison-Wesley, Reading, Massachuttes, 1969.

15.Isermann, R.: *Digital Control Systems,* Spriger-Verlag Berlin, Heidelberg, 1981.

16.Isermann, R.: *Digital Control Systems, Second Revised Edition,* Vol. I şi II, Spriger-Verlag Berlin, Heidelberg, 1989.

17.Isermann, R.: *Practical Aspects of Identification,* Automatica 16, pag. 575-587, 1980.

18.Isermann, R.: *Results on the Simplification of Dynamic Process Models,* Int. Journal of Contol, pag. 149-159, 1973.

19.Jury, E. I.: *Sampled-Data Control Systems,* John Wiley and Sons, 1958 (a doua ediție: Krieger, 1977).

20.Jury, E. I., *Theory and application of the Z-Transform Method,* John Wiley and Sons, 1964 (a doua ediție: Krieger, 1973).

21.Kalman, R. E., Falb, P. L., Arbib, M. A.: *Topics in Mathematical System Theory,* McGGraw Hill, New York, 1969.

22.Kučera, V.: *Discrete Liniar Control,* Academia, Prague, 1979.

23.Kuo, B. C.: *Analysis and Synthesis of Sample-Data Control Systems,* Englewood-Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1963.

24.Kuo, B. C.: *Discrete-Data Control Systems,* Englewood-Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1970.

25.Kuo, B. C.: *Sisteme automate cu eşantionare* (traducere din limba engleză), Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

26.Kuo, B. C.: *Digital Control Systems,* Holt- Saunders, Tokyo, 1980.

27.Lazăr, C., Păstrăvanu, O., Poli, E., Schönberger, F.: *Conducerea asistată de calculator a proceselor tehnice,* Editura MatrixRom, Bucureşti, 1987.

28.Middleton, R., Goodwin, G. C., *Digital Control and Estimation - A Unified Approach*, Prentice Hall International, Inc, 1990.

29.Min, J. L., Schrage, J. J.: *Designing Analog and Digital Control Systems* Ellis Harwood Ltd., Chichester, Sussex, England, 1988.

30.Pop E., Naforniță, I., Mihăescu, A., Tiponuț, V., Toma, L.: *Metode numerice de prelucrare a semnalelor*, Editura Facla, Timişoara, 1989.

31.Sâmpăleanu, O.: *Circuite pentru conversia numerică a datelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.

32.Sângeorzan, D.: *Echipamente de reglare numerică*, Editura Militară, 1990

33.Statomir, D., Stănăşilă, O.: *Metode matematice în teoria semnalelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

34.Voicu, M.: *Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.

35.Voicu, M., Pătrăvanu, O.: *Non-Recursive Models in Control System Analysis and Design*, Editura Dosoftei, 1997.

Cuprins

I. Introducere 1
1.1. Tipuri de semnale 2
1.2. Teoria sistemelor discrete 5
1.3. Sisteme esenţial discrete 6

II. Discretizarea semnalelor 9
2.1. Cuantificarea semnalelor 9
2.2. Eşantionarea semnalelor 11
2.3. Conversia A/N 12

III. Reconstituirea semnalelor continue 15
3.1. Extrapolatorul de ordin 0 15
3.2. Extrapolatorul de ordin 1 17
3.3. Extrapolatorul de ordin fracţionar 19
3.4. Extrapolatorul exponenţial 19
3.3 Conversia N-A 20

IV. Transformata Z 22
4.1. Proprietăţile transformatei z 24
4.2 Spectrul de frecvenţă al semnalului eşantionat
Teorema lui Shannon 28
4.3. Transformata inversă z 30
4.4 Limitările transformatei z 32
4.5 Răspunsul sistemelor discrete
între momentele de eşantionare 34

V. Funcţii de transfer în z 38
5.1. Suma de convoluţie 38
5.2 Răspunsul la impuls şi funcţia de transfer în z 38

5.3. Proprietăți ale funcțiilor de transfer în z 42
şi ale ecuațiilor cu diferențe

VI. Stabilitate. Polii şi zerourile
funcției de transfer discrete 47
6.1. Amplasarea polilor în planul z 47
6.2. Poli complex-conjugați în planul z 49
6.3 Corespondența dintre planul s şi planul z 50
6.4. Condiția de stabilitate asimptotică 51
6.5. Analiza stabilității prin transformare biliniară 52
6.6. Criteriul Shur-Cohn-Jury 53
6.7. Plasarea zerourilor în planul z 56
6.8. Analiza erorilor staționare 56

VII. Sinteza sistemelor automate discrete 60
7.1. Date inițiale şi obiective
în proiectarea sistemelor discrete 60
7.2. Modele matematice ale proceselor discrete 61
7.3. Metode de proiectare a sistemelor automate discrete 65

VIII. Proiectarea sistemelor automate discrete
prin metode de alocare a polilor 66
8.1. Cazul general 66
8.2 Sinteza sistemelor discrete
prin alocare poli-zerouri 70

IX. Proiectarea directă în domeniul timp
a sistemelor discrete 79
9.1. Metoda timpului finit 79
9.2. Metoda timpului minim 82

X. Proiectarea sistemelor automate discrete
pe modele intrare-stare-ieşire 86

10.1. Ecuația vectorială cu diferențe obținută pe baza ecuatiei diferențiale vectoriale 86
10.2. Ecuația vectorială cu diferențe obținută pe baza ecuației cu diferențe a sistemului 89
10.3. Soluția ecuației vectoriale cu diferențe 91
10.4. Determinarea funcției de transfer în z 92
10.5 Controlabilitatea şi observabilitatea 93
10.6 Controlul după stare cu o ecuație caracteristică dată 96
10.7 Controlul după stare prin metoda timpului finit (deadbeat) 97
10.8 Estimator de stare 99

XI. Implementarea sistemelor cu informații discrete 101
11.1 Prefiltrarea şi întârzierea computațională 104
11.2. Alegerea perioadei de eşantionare 108
11.3. Elementele de execuție neliniare 110
11.4. Aspecte operaționale 113
11.5. Aspecte numerice 116

Anexa 1. Tabelele transformatelor Laplace şi z 118

Anexa 2 Tabela transformatelor Laplace şi z modificate 121

Anexa 3 Tabela transformatelor Laplace şi w 124

Bibliografie 127

Cuprins 130